

Démonstration de la proposition du paragraphe 2.7

Systemes de coordonnées

Coordonnées polaires

- a) Le point M , de coordonnées polaires (r, ϕ) , a pour vecteur position $\mathbf{OM} = r\mathbf{e}_r$.
- b) L'élément de surface élémentaire dS est le produit de l'élément de longueur dr dû à une variation infinitésimale dr de r avec l'élément de longueur $r d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de ϕ .
 Donc :

$$dS = r dr d\phi \quad (1)$$

L'idée est que pour dr et $d\phi$ suffisamment petits dS peut être assimilé à l'aire d'un carré. La surface d'un disque est donc l'intégration de ce petit élément de surface selon le rayon de 0 à R et sur un tour complet soit pour ϕ allant de 0 à 2π , i.e. :

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\phi . \quad (2)$$

- c) On projette \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_ϕ sur les vecteurs de base cartésiens :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} \equiv \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y , \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y . \quad (4)$$

On calcule les dérivées de \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_ϕ en dérivant leurs expressions en coordonnées cartésiennes puis en les réexprimant dans la base $(\mathbf{O}, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi , \quad (5)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_r . \quad (6)$$

- d) La vitesse \mathbf{v} est la dérivée du vecteur position \mathbf{OM} :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (r\mathbf{e}_r) = \dot{r}\mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi . \quad (7)$$

L'accélération \mathbf{a} est la dérivée du vecteur vitesse \mathbf{v} :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi . \quad (8)$$

Coordonnées cylindriques

- a) Le point M de coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) a pour vecteur position $\mathbf{OM} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z$.

- b) L'élément de volume élémentaire dV en coordonnées cylindriques est le produit de l'élément de longueur $d\rho$ dû à une variation infinitésimale $d\rho$ de ρ , avec l'élément de longueur $\rho d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de ϕ , et avec l'élément de longueur dz dû à une variation infinitésimale dz de z . Donc dV s'écrit :

$$dV = \rho d\rho d\phi dz . \quad (9)$$

Le volume V d'un cylindre de rayon R et de hauteur h est donc l'intégration de cet élément de volume sur tout le cylindre :

$$V = \int_0^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho d\phi dz . \quad (10)$$

- c) Comme pour les coordonnées polaires :

$$\mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \phi \mathbf{e}_y , \quad (11)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y , \quad (12)$$

$$\mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (13)$$

Les dérivées temporelles de ces vecteurs, exprimées en coordonnées cartésiennes, sont :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (14)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} , \quad (15)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_z}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} . \quad (16)$$

On cherche maintenant à exprimer les dérivées temporelles des vecteurs de base, i.e. les vecteurs $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$, $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ et $\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$, dans la base de notre repère cylindrique. Pour ce faire, on utilise le produit scalaire pour calculer les différentes composantes de ces vecteurs. On rappelle qu'un vecteur \mathbf{b} peut s'écrire dans une base quelconque $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ à l'aide du produit scalaire comme :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_2) \mathbf{e}_2 + (\mathbf{b} \cdot \mathbf{e}_3) \mathbf{e}_3 . \quad (17)$$

Ainsi, voici comment procéder pour projeter $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$ sur le repère cylindrique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_z \right) \mathbf{e}_z , \quad (18)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi = 0 , \quad (19)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \sin^2 \phi + \dot{\phi} \cos^2 \phi = \dot{\phi} , \quad (20)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{\phi} \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 . \quad (21)$$

On obtient ainsi l'expression de $\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt}$ dans la base cylindrique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\rho}{dt} = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi . \quad (22)$$

On répète la démarche pour exprimer $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ dans le repère $(O, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_z \right) \mathbf{e}_z , \quad (23)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\rho = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} = -\dot{\phi} \cos^2 \phi - \dot{\phi} \sin^2 \phi = -\dot{\phi} , \quad (24)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} = \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi = 0 , \quad (25)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 . \quad (26)$$

On obtient ainsi :

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \mathbf{e}_\rho . \quad (27)$$

Finalement, la décomposition de $\frac{d\mathbf{e}_z}{dt}$ sur la base $(O, \mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_z)$ est triviale et se réduit au vecteur nul.

d) De même que pour les coordonnées polaires :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{OM}) = \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{e}_\rho + z \mathbf{e}_z) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \mathbf{e}_z , \quad (28)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \left(\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \right) \mathbf{e}_\rho + \left(\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi} \right) \mathbf{e}_\phi + \ddot{z} \mathbf{e}_z . \quad (29)$$

Coordonnées sphériques

- a) Le point M , de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) , a pour vecteur position $\mathbf{OM} = r \mathbf{e}_r$.
- b) L'élément de volume élémentaire dV en coordonnées sphériques est le produit de la l'élément de longueur dr dû à une variation infinitésimale dr de r , avec l'élément de longueur $r d\theta$ dû à une variation infinitésimale $d\theta$ de l'angle θ , et avec l'élément de longueur $r \sin \theta d\phi$ dû à une variation infinitésimale $d\phi$ de l'angle ϕ . On peut donc exprimer dV comme :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \quad (30)$$

Par conséquent, le volume V d'une sphère de rayon R s'écrit :

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi . \quad (31)$$

Nous attirons ici votre attention sur le fait que le domaine de définition de l'angle θ en coordonnées sphériques est $[0, \pi]$, et celui de l'angle ϕ est $[0, 2\pi]$.

c) Les vecteurs de base du repère sphérique se projettent comme ceci sur le repère cartésien :

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \equiv \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z, \quad (32)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \equiv \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_x + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_y - \sin \theta \mathbf{e}_z, \quad (33)$$

$$\mathbf{e}_\phi = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \equiv -\sin \phi \mathbf{e}_x + \cos \phi \mathbf{e}_y. \quad (34)$$

Et leurs dérivées s'expriment comme cela :

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (36)$$

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (37)$$

Maintenant et comme pour les coordonnées cylindriques, il faut projeter ces dérivées sur le repère sphérique. Commençons par $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = \dot{\theta} \cos \theta \sin \theta - \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \dot{\theta} \cos^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\theta} \sin^2 \theta = \dot{\theta}, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \dot{\phi} \sin \theta. \end{aligned} \quad (41)$$

On obtient ainsi l'expression suivante pour $\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi. \quad (42)$$

Projetons maintenant $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$ sur la base $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta} \sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - \dot{\theta} \cos^2 \theta = -\dot{\theta} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = -\dot{\theta}, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \dot{\theta} \sin \theta \cos \theta = 0, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi - \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ -\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ -\dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = \dot{\phi} \cos \theta. \end{aligned} \quad (46)$$

Et donc $\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt}$ peut s'écrire comme :

$$\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \mathbf{e}_r + \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\phi \quad (47)$$

Il nous reste à projeter $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$ sur le repère sphérique :

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_r \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi \right) \mathbf{e}_\phi, \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_r &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\phi} \sin \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\dot{\phi} \sin \theta, \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\theta &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi \\ \cos \theta \sin \phi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \\ &= -\dot{\phi} \cos \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) = -\dot{\phi} \cos \theta, \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} \cdot \mathbf{e}_\phi &= \begin{pmatrix} -\dot{\phi} \cos \phi \\ -\dot{\phi} \sin \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi. \end{aligned} \quad (51)$$

On obtient ainsi pour $\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt}$:

$$\frac{d\mathbf{e}_\phi}{dt} = -\dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_r - \dot{\phi} \cos \theta \mathbf{e}_\theta. \quad (52)$$

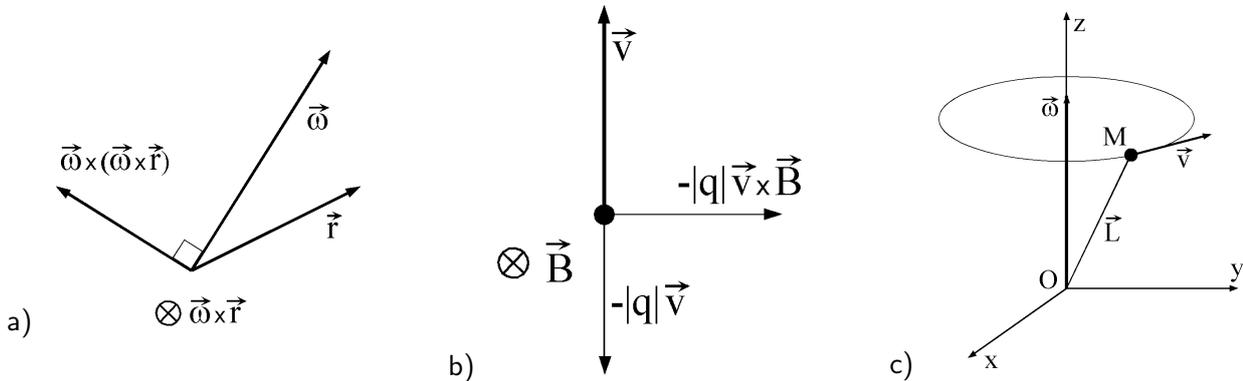
d) De même que pour les coordonnées polaires et cylindriques :

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} (\mathbf{OM}) = \frac{d}{dt} (r \mathbf{e}_r) = \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (54)$$

6.1 Points Matériels

6.6 Produit vectoriel



- c) Soit \mathbf{L} un vecteur de norme constante défini par les points O et M où O est un point fixe et M l'extrémité du vecteur \mathbf{L} . Soit par ailleurs, un vecteur $\boldsymbol{\omega}$ constant.

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}) = 0$$

d'où la vitesse du point M (c'est-à-dire $\frac{d\mathbf{L}}{dt}$) est perpendiculaire à $\boldsymbol{\omega}$.

$$\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{L} \cdot (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{L}) = 0$$

donc $\mathbf{L} \cdot \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(L^2)}{dt} = 0$ donc $\|\mathbf{L}\| = \text{cste}$ et la vitesse de M est perpendiculaire à \mathbf{L} .

D'où l'angle $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\omega})$ est constant et \mathbf{L} « tourne » autour de $\boldsymbol{\omega}$. Ce mouvement est appelé « précession ».

- d) Soient (x_a, y_a, z_a) les coordonnées du vecteur \mathbf{a} , (x_b, y_b, z_b) celles du vecteur \mathbf{b} et (x_c, y_c, z_c) celles du vecteur \mathbf{c} .

On a :

$$\mathbf{b} \wedge \mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_b z_c - z_b y_c \\ x_c z_b - x_b z_c \\ x_b y_c - y_b x_c \end{pmatrix}$$

Alors,

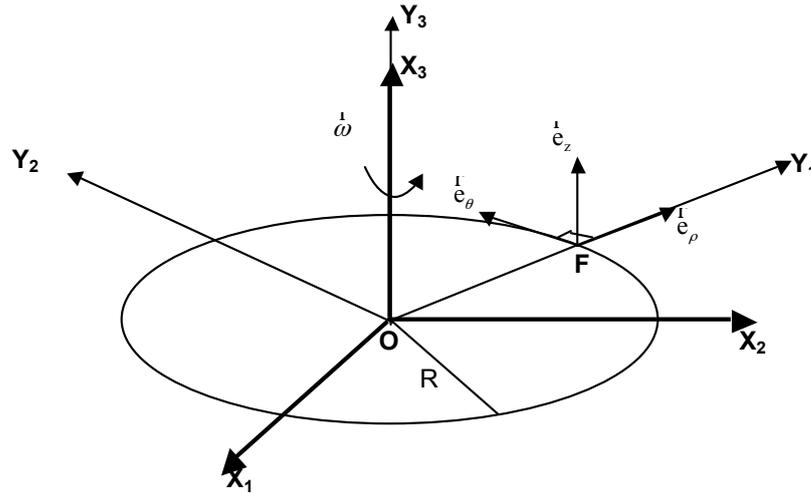
$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} y_b z_c - z_b y_c \\ x_c z_b - x_b z_c \\ x_b y_c - y_b x_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_a x_b y_c - y_a y_b x_c - z_a x_c z_b + z_a x_b z_c \\ z_a y_b z_c - z_a z_b y_c - x_a x_b y_c + x_a y_b x_c \\ x_a x_c z_b - x_a x_c z_b - y_a y_b z_c + y_a z_b y_c \end{pmatrix}$$

Or :

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= (x_a x_c + y_a y_c + z_a z_c) \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} - (x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b) \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_a x_c x_b + y_a y_c x_b + z_a z_c x_b - (x_a x_b x_c + y_a y_b x_c + z_a z_b x_c) \\ x_a x_c y_b + y_a y_c y_b + z_a z_c y_b - (x_a x_b y_c + y_a y_b y_c + z_a z_b y_c) \\ x_a x_c z_b + y_a y_c z_b + z_a z_c z_b - (x_a x_b z_c + y_a y_b z_c + z_a z_b z_c) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_a x_b y_c - y_a y_b x_c - z_a x_c z_b + z_a x_b z_c \\ z_a y_b z_c - z_a z_b y_c - x_a x_b y_c + x_a y_b x_c \\ x_a x_c z_b - x_a x_c z_b - y_a y_b z_c + y_a z_b y_c \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc bien $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \cdot \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$.

6.10 La fourmi immobile



Système, référentiels et repères : Le système est la fourmi qui est assimilée à un point matériel F de masse m . Le référentiel absolu est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ et le référentiel relatif du tourne-disque est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ et un repère cylindrique $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Le référentiel relatif est en mouvement autour de l'axe $\mathbf{X}_3 = \mathbf{Y}_3$ par rapport au référentiel absolu avec une vitesse angulaire constante ω .

Contraintes : La trajectoire de la fourmi est un cercle de rayon R , i.e. $r = R = \text{cst} \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. La fourmi paraît immobile par rapport à un disque qui tourne à vitesse angulaire constante ω , i.e. $\dot{\theta} = \omega = \text{cste} \Rightarrow \ddot{\theta} = 0$. L'origine O est sur l'axe de rotation. Donc, sa vitesse et son accélération absolue sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(O) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(O) = \mathbf{0}$.

a) En tenant compte des contraintes (i.e. $\dot{\omega} = 0$), la vitesse absolue $\mathbf{v}_a(F)$ et l'accélération absolue $\mathbf{a}_a(F)$ de la fourmi au point F sont de la forme

$$\underbrace{\mathbf{v}_a(F)}_{\text{vit. absolue}} = \underbrace{\mathbf{v}_r(F)}_{\text{vit. relative}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}}_{\text{vit. d'entraînement}}, \quad (55)$$

$$\underbrace{\mathbf{a}_a(F)}_{\text{acc. absolue}} = \underbrace{\mathbf{a}_r(F)}_{\text{acc. relative}} + \underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF})}_{\text{acc. centripète}} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F)}_{\text{acc. de Coriolis}}. \quad (56)$$

Vu que la fourmi est immobile dans le référentiel absolu, sa vitesse et son accélération absolues sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(F) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(F) = \mathbf{0}$. Par conséquent, la vitesse relative (55) et l'accélération relative (56) de la fourmi sont de la forme,

$$\mathbf{v}_r(F) = -\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}, \quad (57)$$

$$\mathbf{a}_r(F) = -\underbrace{\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF})}_{\text{acc. centripète}} - \underbrace{2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F)}_{\text{acc. de Coriolis}}. \quad (58)$$

Les équations (57) et (58) impliquent que l'accélération de Coriolis et l'accélération centripète sont respectivement de la forme,

$$2\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{v}_r(F) = -2\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}) = -2\omega^2 R \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\rho) = 2\omega^2 R \mathbf{e}_\rho, \quad (59)$$

$$\boldsymbol{\omega} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{OF}) = \omega^2 R \mathbf{e}_z \wedge (\mathbf{e}_z \wedge \mathbf{e}_\rho) = -\omega^2 R \mathbf{e}_\rho, \quad (60)$$

où $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ et $\mathbf{OF} = R \mathbf{e}_\rho$.

6.11 La boîte suspendue

Référentiels et repères : Le référentiel absolu du laboratoire est décrit par le repère cartésien $(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ et le référentiel relatif de la boîte est décrit par le repère cartésien $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$.

a) **Boîte** (on néglige le poids m du point matériel) :

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P}_M = M \mathbf{g} = -Mg \hat{x}_3$,
- Tension du ressort : $\mathbf{T} = -kx_3 \hat{x}_3$.

Equation du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{T} = M \mathbf{a}_a(G)$ dans le référentiel absolu. Le mouvement a lieu selon l'axe vertical. La projection de l'équation du mouvement selon l'axe \hat{x}_3 donne,

$$M\ddot{x}_3 = -Mg - kx_3. \quad (61)$$

En utilisant le changement de variable,

$$u = x_3 + \frac{Mg}{k}, \quad (62)$$

l'équation du mouvement (61) devient,

$$\ddot{u} + \frac{k}{M} u = 0. \quad (63)$$

La solution de cette équation est de la forme,

$$u(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \phi\right), \quad (64)$$

où l'amplitude A et le déphasage ϕ sont déterminés par les conditions initiales. De plus, le changement de variable (62) implique que,

$$x_3(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \phi\right) - \frac{Mg}{k}, \quad (65)$$

et la dérivée par rapport au temps de cette équation est donnée par,

$$\dot{x}_3(t) = -A \sqrt{\frac{k}{M}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t + \phi\right). \quad (66)$$

Les conditions initiales sont,

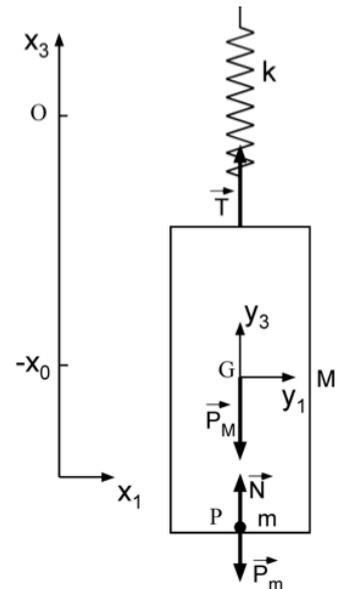
$$x_3(0) = -x_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_3(0) = 0, \quad (67)$$

ce qui implique que l'équation horaire (65) est de la forme,

$$x_3(t) = \frac{Mg - kx_0}{k} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}} t\right) - \frac{Mg}{k}. \quad (68)$$

b) **Point matériel** :

Bilan des forces extérieures :



- Poids : $\mathbf{P}_m = m\mathbf{g} = -mg\hat{\mathbf{y}}_3$,
- Réaction normale de la boîte : $\mathbf{N} = N\hat{\mathbf{y}}_3$.

Equation du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}_m + \mathbf{N} = m\mathbf{a}_a(P)$ dans le référentiel absolu où

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(G) + \mathbf{a}_r(P) , \quad (69)$$

et $\mathbf{a}_r(P)$ représente l'accélération relative du point P par rapport au référentiel relatif de la boîte. La projection de cette équation vectorielle selon l'axe $\hat{\mathbf{y}}_3$ donne,

$$-mg + N = m(\ddot{x}_3 + \ddot{y}_3) . \quad (70)$$

Conditions de décollage :

- Absence de réaction normale : $N = 0$,
- Mouvement relatif vers le haut du point par rapport à la boîte : $\ddot{y}_3 > 0$.

Ces deux conditions s'expriment dans l'équation du mouvement (70) comme,

$$\ddot{y}_3 = -(g + \ddot{x}_3(0)) > 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{x}_3 < -g . \quad (71)$$

La dérivée seconde de l'équation horaire (68) par rapport au temps est de la forme,

$$\ddot{x}_3(t) = -\frac{Mg - kx_0}{M} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) . \quad (72)$$

Ainsi, la condition de décollage (71) s'exprime explicitement comme,

$$-\frac{Mg - kx_0}{M} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) < -g \quad \Rightarrow \quad \left(1 - \frac{kx_0}{Mg}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) > 1 . \quad (73)$$

A l'opposé, la condition de non-décollage, s'exprime comme,

$$\left(1 - \frac{kx_0}{Mg}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) \leq 1 . \quad (74)$$

Cette condition doit être vraie en tout temps t . Ainsi, aux maxima et aux minima de la fonction $\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right)$, la condition de non-décollage s'exprime respectivement comme,

$$\begin{aligned} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) = 1 & \quad \Rightarrow \quad x_0 \geq 0 , \\ \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) = -1 & \quad \Rightarrow \quad x_0 \leq 2\frac{Mg}{k} . \end{aligned} \quad (75)$$

Des inéquations (75), on déduit la condition de non-décollage sur x_0 , i.e.

$$0 \leq x_0 \leq 2\frac{Mg}{k} . \quad (76)$$

Note : cette condition est indépendante de la masse m du point matériel si $m \ll M$.

6.14 Projeté d'une balançoire

- a) La force de traction du fil \mathbf{T} ne travaille pas. En effet, elle est toujours perpendiculaire à la trajectoire, donc comme le travail est défini par :

$$W = \int \mathbf{T} \cdot d\mathbf{r} \quad (77)$$

le produit $\mathbf{T} \cdot d\mathbf{r}$ est toujours nul. La force de gravitation est quant à elle une force conservative, on a donc :

$$E = E_{cin} + E_{pot} = cste \quad (78)$$

Pour $\theta = \theta_{max}$, on a $E_{cin} = 0$, et seule reste la contribution de l'énergie potentielle donnée par :

$$E_{pot} = E = mg(H_0 - R \cos \theta_{max}) \quad (79)$$

avec $E_{pot} = 0$ pour $H = 0$.

Pour un θ donné, on a donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgH = mg(H_0 - R \cos \theta_{max}) \quad (80)$$

où $H = H_0 - R \cos \theta$.

On trouve donc la vitesse du point matériel situé à un angle θ :

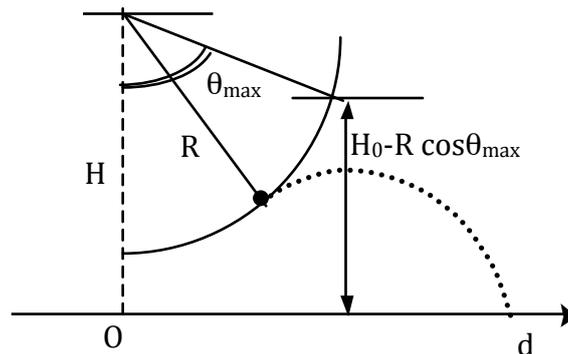
$$v = \sqrt{2gR(\cos \theta - \cos \theta_{max})} \quad (81)$$

b) L'angle que fait la vitesse \mathbf{v}_0 en θ par rapport à l'horizontale est $\alpha = \theta$, par de simples relations géométriques.

c) Au sol, $E_{pot} = 0$, donc :

$$E_{cin} = mg(H_0 - R \cos \theta_{max}) \quad (82)$$

Donc tout se passe comme si l'enfant tombait d'une hauteur $H_0 - R \cos \theta_{max}$.



Facultatif : on peut calculer la distance d en fonction de θ et θ_{max} , en écrivant $x(t)$ et $y(t)$ pour un corps soumis à l'action de la pesanteur.

6.15 Jokari vertical

Le mouvement a lieu uniquement selon l'axe vertical $\hat{\mathbf{z}}$.

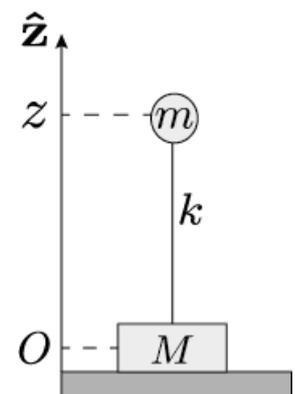
a) *Bilan des forces extérieures (balle) :*

- Poids de la balle : $\mathbf{P}_m = -mg \hat{\mathbf{z}}$,
- Force élastique du bloc sur la balle : $\mathbf{F}_m = -kz \hat{\mathbf{z}}$.

b) *Equation du mouvement (balle) :* $\Sigma \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{P}_m + \mathbf{F}_m = m \mathbf{a}$.

L'équation du mouvement selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ est donnée par,

$$-mg - kz = m\ddot{z} \quad \text{ou} \quad \ddot{z} + \frac{k}{m}z = -g. \quad (83)$$



c) *Bilan des forces extérieures (bloc) :*

- Poids du bloc : $\mathbf{P}_M = -Mg \hat{\mathbf{z}}$,
- Réaction normale du sol sur le bloc : $\mathbf{N} = N \hat{\mathbf{z}}$,
- Force élastique de la balle sur le bloc : $\mathbf{F}_M = -\mathbf{F}_m = kz \hat{\mathbf{z}}$.

d) *Equilibre des forces (bloc) :* $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P}_M + \mathbf{F}_M + \mathbf{N} = \mathbf{0}$. L'équilibre des forces selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$ est donné par,

$$-Mg + kz + N = 0 . \quad (84)$$

e) Le bloc décolle lorsque la réaction normale s'annule, i.e. $N = 0$. Par conséquent, la hauteur $z = h$ à laquelle le bloc décolle est déterminée par l'équation d'équilibre (84) dans le cas limite où $N = 0$, i.e.

$$h = \frac{Mg}{k} . \quad (85)$$

f) L'équation horaire pour la balle est obtenue en intégrant l'équation du mouvement (102) par rapport au temps. En faisant le changement de variable,

$$u = z + \frac{mg}{k} \quad \Rightarrow \quad \ddot{u} = \ddot{z} , \quad (86)$$

l'équation du mouvement du mouvement (102) peut être mise sous la forme

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u = 0 , \quad (87)$$

qui est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{k/m}$ dont la solution générale est de la forme,

$$u(t) = A \cos(\omega t + \phi) , \quad (88)$$

De la relation (86) on tire l'équation horaire $z(t)$ du mouvement vertical de la balle est

$$z(t) = A \cos(\omega t + \phi) - \frac{mg}{k} . \quad (89)$$

L'amplitude du mouvement est maximale à $t = 0$, ce qui implique que le déphasage est nul, i.e. $\phi = 0$. En utilisant la condition initiale

$$z(0) = h = \frac{Mg}{k} , \quad (90)$$

l'équation (89) implique que l'amplitude du mouvement est donnée par,

$$A = \frac{(M+m)g}{k} . \quad (91)$$

Finalement, l'équation horaire de la balle le premier rebond sur le bloc (en $z = 0$) peut être réécrite comme

$$z(t) = \left(\frac{(M+m)g}{k} \right) \cos(\omega t) - \frac{mg}{k} . \quad (92)$$

6.16 Boules de neige

Démarche : On établit d'abord les équations du mouvement d'une boule de neige, puis on détermine les angles vérifiant les conditions initiales et finales de la trajectoire et les temps de vols.

Référentiel, repère et système : On choisit comme référentiel la terre et comme repère le système de coordonnées cartésiennes dans le plan vertical Oxy centré sur la position de tir. Le système est la boule de neige.

Bilan des forces : Poids : $m \mathbf{g} = -mg \mathbf{e}_y$.

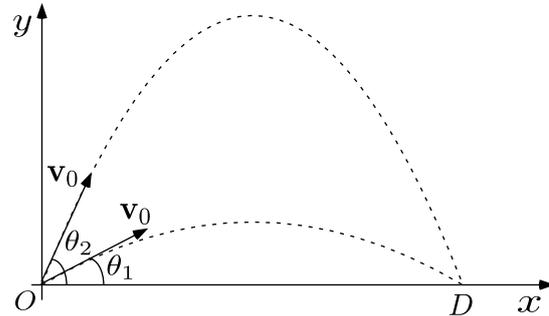
Loi du mouvement : Poids : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = m \mathbf{a}$.

Conditions initiales (à $t = 0$) :

- $x(0) = 0$ et $y(0) = 0$.
- $\dot{x}(0) = v_0 \cos \theta$ et $\dot{y}(0) = v_0 \sin \theta$.

Conditions d'impact (à $t = t_i$) :

- $x(t_i) = D$ et $y(t_i) = 0$.



Equations du mouvement : On projète la loi du mouvement $m \mathbf{g} = m \mathbf{a}$ selon les axes horizontal \mathbf{e}_x et vertical \mathbf{e}_y , et on intègre en tenant compte des conditions initiales, i.e.

$$\bullet \mathbf{e}_x : \quad \ddot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = v_0 \cos \theta \quad \Rightarrow \quad x(t) = v_0 \cos \theta t, \quad (93)$$

$$\bullet \mathbf{e}_y : \quad \ddot{y}(t) = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \theta \quad \Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \theta t. \quad (94)$$

a) Les équations du mouvement (180) et (181) au point d'impact $(D, 0)$ et au temps d'impact $t = t_i$ donnent,

$$D = v_0 \cos \theta t_i, \quad (95)$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt_i^2 + v_0 \sin \theta t_i. \quad (96)$$

En substituant l'équation (95) dans la seconde équation (96), celle-ci se réduit à

$$\frac{gD}{v_0^2} = 2 \sin \theta \cos \theta. \quad (97)$$

De la relation trigonométrique $\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta$, on tire que

$$\frac{gD}{v_0^2} = \sin(2\theta). \quad (98)$$

La relation d'équivalence trigonométrique $\sin(2\theta) = \sin(\pi - 2\theta)$, implique que l'équation (98) a deux solutions, i.e.

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{gD}{v_0^2}\right), \\ \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{gD}{v_0^2}\right). \end{cases} \quad (99)$$

Application numérique : $\theta_1 = 18.9^\circ$ et $\theta_2 = 71.1^\circ$ avec $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

b) Le temps de vol $t_{1,2}$ des boules 1 et 2 est déduit de l'équation (95), i.e.

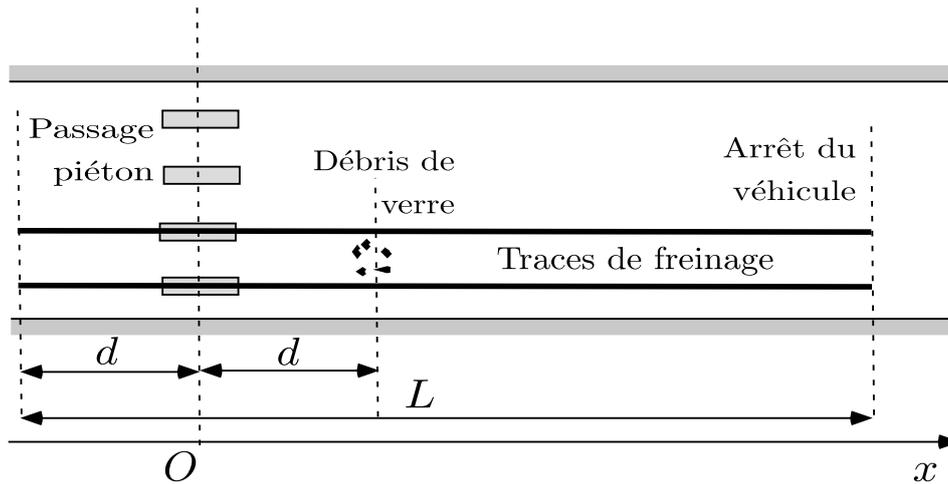
$$t_{1,2} = \frac{D}{v_0 \cos \theta_{1,2}}. \quad (100)$$

La différence de temps de vol Δt est donnée par

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{D}{v_0} \left(\frac{1}{\cos \theta_2} - \frac{1}{\cos \theta_1} \right). \quad (101)$$

Application numérique : $t_1 = 1.32 \text{ s}$, $t_2 = 3.86 \text{ s}$ et $\Delta t = 2.54 \text{ s}$.

6.19 L'accident



Note : L'origine O de l'axe x est centrée sur le passage piéton. La norme de la vitesse initiale de la voiture est v_0 .

a) Analyse des traces de freinage :

Conditions initiales ($t = 0$) : $x(0) = -d$ et $v(0) = v_0$.

Conditions finales ($t = t_f$) : $x(t_f) = L - d$ et $v(t_f) = 0$.

Le temps initial $t = 0$ correspond au moment où la voiture commence à freiner et le temps final $t = t_f$ au moment où la voiture s'immobilise.

Equation du mouvement : On intègre la loi du mouvement selon l'axe x en tenant compte des conditions initiales, i.e.

$$\ddot{x}(t) = -a \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -at + v_0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = -\frac{1}{2}at^2 + v_0t - d. \quad (102)$$

L'équation du mouvement (102) peut être évaluée lorsque la voiture s'immobilise au temps $t = t_f$ en tenant compte des conditions finales, i.e.

$$0 = -at_f + v_0, \quad (103)$$

$$L - d = -\frac{1}{2}at_f^2 + v_0t_f - d. \quad (104)$$

En substituant l'équation (103) dans l'équation (104), on détermine la vitesse initiale v_0 , i.e.

$$v_0 = \sqrt{2La}. \quad (105)$$

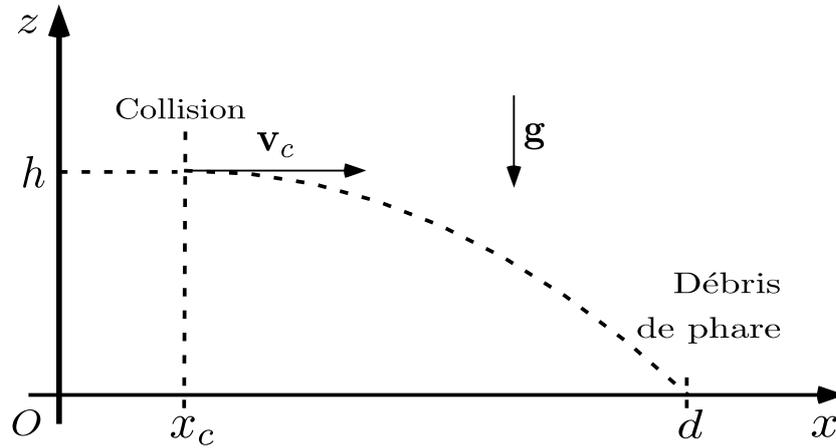
Finalement, en substituant l'expression (105) pour la vitesse initiale dans l'équation (103), on trouve le temps de freinage t_f , i.e.

$$t_f = \sqrt{\frac{2L}{a}}. \quad (106)$$

Application numérique : $v_0 = 25 \text{ m/s} = 90 \text{ km/h}$ et $t_f = 4.8 \text{ s}$.

Par conséquent, la voiture roulait trop vite!

b) Analyse de la position des débris de phare :



Conditions initiales de collision ($t = t_c$) : (dédites de l'équation du mouvement (102))

$$\begin{aligned} x(t_c) \equiv x_c &= -\frac{1}{2}at_c^2 + v_0t_c - d \quad \text{et} \quad v_x(t_c) = v_c = -at_c + v_0, \\ z(t_c) \equiv z_c &= h \quad \text{et} \quad v_z(t_c) = 0. \end{aligned} \quad (107)$$

Conditions finales de collision ($t = t_c + \Delta t$) : (Δt est le temps de vol des débris)

$$x(t_c + \Delta t) = d \quad \text{et} \quad z(t_c + \Delta t) = 0. \quad (108)$$

Equations du mouvement :

L'équation du mouvement selon l'axe horizontal x est un mouvement rectiligne uniforme. L'équation selon l'axe vertical z est une chute libre, i.e. un mouvement uniformément accéléré avec une accélération de norme g dirigée vers le bas. On projète la loi du mouvement selon les axes horizontal x et vertical z , et on intègre par rapport à $t' = t - t_c$ en tenant compte des conditions initiales de collision (107), i.e.

$$\ddot{x}(t') = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}(t') = v_c \quad \Rightarrow \quad x(t') = v_ct' + x_c, \quad (109)$$

$$\ddot{z}(t') = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z}(t') = -gt' \quad \Rightarrow \quad z(t') = -\frac{1}{2}gt'^2 + h. \quad (110)$$

Ces équations du mouvement ne sont valables qu'après la collision, i.e. lorsque $t' \geq 0$. Les équations du mouvement (109) et (110) peuvent alors être évaluées lorsque les débris de phare touchent le sol au temps $t = t_c + \Delta t \Rightarrow t' = \Delta t$ en tenant compte des conditions finales (108), i.e.

$$d = v_c\Delta t + x_c, \quad (111)$$

$$0 = -\frac{1}{2}g(\Delta t)^2 + h. \quad (112)$$

En utilisant les conditions initiales de collision (107), l'équation (111) devient une équation du second degré en t_c , i.e.

$$t_c^2 - 2\left(\frac{v_0}{a} - \Delta t\right)t_c + \frac{2}{a}(2d - v_0\Delta t) = 0. \quad (113)$$

En substituant l'équation (112) dans l'équation (113), celle-ci devient,

$$t_c^2 - 2\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)t_c + \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right) = 0. \quad (114)$$

Les solutions analytiques de cette équation du dixième degré sont,

$$t_c = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a}\left(2d - v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}, \quad (115)$$

où la solution avec le signe positif correspond à un temps plus grand que le temps de freinage t_f (7.8 s). Cette solution acausale n'a aucune signification physique et doit être rejetée. Ainsi la solution physique est,

$$t_c = \frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a} \left(2d - v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)}, \quad (116)$$

De plus, en utilisant l'équation (107), l'équation (111) peut être mise sous la forme,

$$x_c = d - a \left(\sqrt{\frac{2h}{g}} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{a} - \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 - \frac{2}{a} \left(2d - v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}\right)} \right) \sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (117)$$

Application numérique : $t_c = 0.93 \text{ s}$ et $x_c = 6 \text{ m}$.

Par conséquent, le piéton traversait en dehors du passage piéton !

6.21 Chute avec force de frottement visqueux

Référentiel, repère et système : on choisit comme référentiel la terre et comme repère l'axe de coordonnée vertical \mathbf{e}_z dirigé vers le bas dont l'origine O correspond à la position de repos du corps de masse m .

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg\mathbf{e}_z$,
- Force de frottement : $\mathbf{F} = -b\mathbf{v} = -bv\mathbf{e}_z$.

Loi du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = m\mathbf{a}$. Selon l'axe \mathbf{e}_z , l'équation du mouvement est donc donnée par

$$mg - b\dot{z} = m\ddot{z}. \quad (118)$$

On peut écrire l'équation du mouvement en terme de la norme $v = \dot{z}$ de la vitesse, i.e.

$$mg - bv = m\dot{v}. \quad (119)$$

- a) La vitesse limite v_l est atteinte lorsque l'accélération est nulle (i.e. $\dot{v} = 0$) et que les forces de pesanteur et de frottement sont égales et opposées. De l'équation (119), on déduit alors l'expression de la vitesse limite,

$$v_l = \frac{mg}{b}. \quad (120)$$

- b) A l'aide du changement de variable

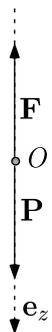
$$u = mg - bv \quad \Rightarrow \quad \dot{u} = -b\dot{v}, \quad (121)$$

l'équation différentielle (119) s'écrit comme,

$$\dot{u} = -\frac{b}{m}u. \quad (122)$$

L'intégration de l'équation différentielle (122) par rapport au temps donne,

$$u(t) = u(0) \exp\left(-\frac{b}{m}t\right). \quad (123)$$



A l'instant initial, le corps est au repos, i.e. $v(0) = 0$. Par conséquent, l'équation (121) implique que,

$$u(0) = mg, \quad (124)$$

et donc l'équation (123) devient,

$$u(t) = mg \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (125)$$

où

$$\tau = \frac{m}{b}. \quad (126)$$

En substituant l'équation (125) dans l'équation (121) et en utilisant la relation (120), l'équation (121) devient,

$$v(t) = v_l \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right). \quad (127)$$

- c) La tangente $T(t)$ correspond au développement limité au premier ordre de l'expression (127) de $v(t)$ autour de $t/\tau = 0$, i.e.

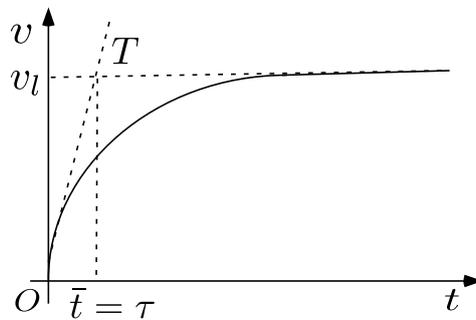
$$T(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow 0} v(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow 0} v_l \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau} + \dots\right)\right) \simeq \frac{v_l}{\tau} t. \quad (128)$$

L'asymptote horizontale A correspond à la limite de l'expression (127) lorsque $t/\tau \rightarrow \infty$, i.e.

$$A = \lim_{t/\tau \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t/\tau \rightarrow \infty} v_l (1 + \dots) \simeq v_l. \quad (129)$$

Le temps \bar{t} correspondant à l'intersection de la tangente et de l'asymptote, i.e. $T(\bar{t}) = A$ vaut,

$$\bar{t} = \tau. \quad (130)$$

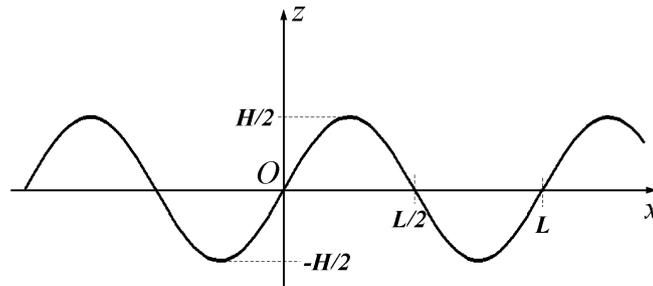


6.23 Champ de bosses : réponse linéaire

- a) Le profil $h(x)$ de la route est de la forme,

$$h(x) = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \quad (131)$$

où H est la hauteur de la bosse (i.e. entre un creux et un sommet) et L est la longueur de la bosse.



Etant donné que le point de contact entre la roue et la route se déplace avec une vitesse horizontale constante v , la position horizontale de ce point de contact est $x = vt$. Ainsi, l'équation du mouvement de ce point $h(t)$ est de la forme

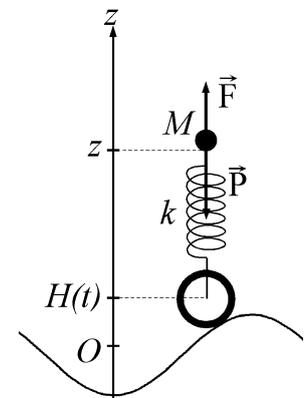
$$h(t) = \frac{H}{2} \sin\left(\frac{2\pi vt}{L}\right). \quad (132)$$

- b) Le mouvement horizontal a lieu à vitesse constante v . Il reste donc à établir l'équation du mouvement selon l'axe vertical

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = M \mathbf{g} = Mg \hat{\mathbf{z}}$,
- Force de rappel du ressort : $\mathbf{F} = -k(z - h(t)) \hat{\mathbf{z}}$ où la longueur du ressort à vide est négligée.

Loi du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{F} = M \mathbf{a}$.



Selon l'axe $\hat{\mathbf{z}}$, l'équation du mouvement est donc donnée par

$$-Mg - k(z - h(t)) = M\ddot{z}. \quad (133)$$

L'équation du point de contact (132) implique que l'équation du mouvement (133) peut être réécrite comme,

$$M\ddot{z} + kz + Mg = k \frac{H}{2} \sin(\omega t), \quad (134)$$

où $\omega = \frac{2\pi v}{L}$.

A l'aide du changement de variable

$$u = z + \frac{Mg}{k} \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{z}, \quad (135)$$

l'équation différentielle (134) s'écrit comme,

$$M\ddot{u} + ku = k \frac{H}{2} \sin(\omega t), \quad (136)$$

- c) La solution de l'équation (136) est de la forme

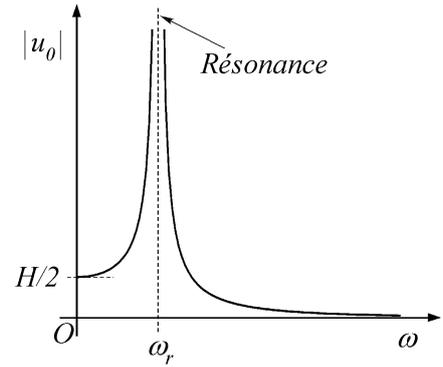
$$u(t) = u_0 \sin(\omega t), \quad (137)$$

comme indiqué dans l'énoncé. En substituant la solution (137) dans l'équation (136), on détermine la forme de l'amplitude u_0 des oscillations, i.e.

$$u_0 = \frac{H}{2 \left(1 - \frac{M\omega^2}{k}\right)}. \quad (138)$$

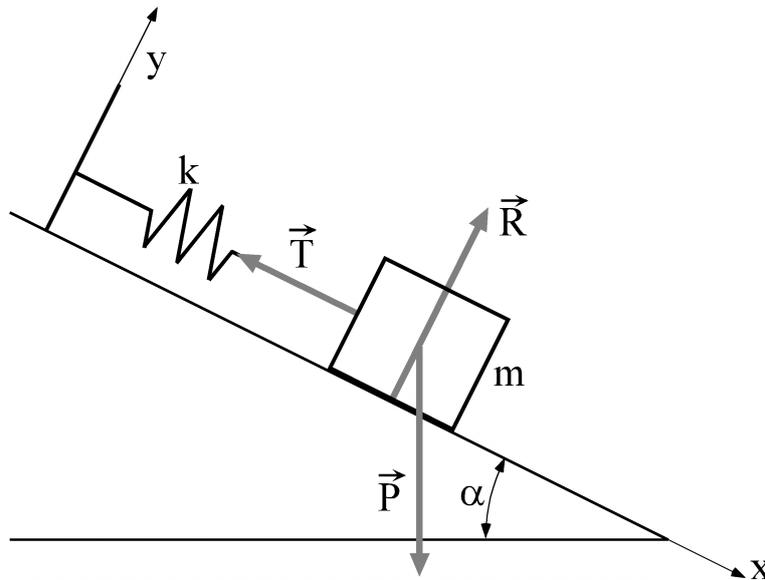
Il y a trois comportements différents pour u_0 correspondant à des limites particulières :

- Faibles amplitudes : $\lim_{\omega \rightarrow 0} u_0 = \frac{H}{2}$.
- Résonance : $\lim_{\omega \rightarrow \omega_r = \sqrt{k/m}} u_0 = \infty$.
- Amplitude nulle : $\lim_{\omega \rightarrow \infty} u_0 = 0$.



La pulsation de résonance vaut $\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le régime de confort maximal correspond aux grandes pulsations, i.e. $\omega \rightarrow \infty$, et donc aux vitesses, i.e. $v \rightarrow \infty$.

6.24 Oscillateur sur plan incliné



On se place dans le repère cartésien Oxy .

a) Bilan des forces :

- La pesanteur $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = mg(\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y)$
- La réaction du support $\mathbf{R} = R\mathbf{e}_y$
- La traction du ressort $\mathbf{T} = -kx\mathbf{e}_x$

b) Il n'y a pas de mouvement selon Oy , ce qui donne $R = mg \cos \alpha$. La seconde loi de Newton selon Ox donne l'équation du mouvement :

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha - kx \quad (139)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique. En réalisant le changement de variable $u = x - \frac{mg}{k} \sin \alpha$, on retombe sur l'écriture connue :

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (140)$$

c) La solution générale de l'équation (139) est du type $x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. Ce qui donne la condition $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Avec la relation $\omega = \frac{2\pi}{T}$, on arrive à la solution $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

6.27 Chute sur sphère

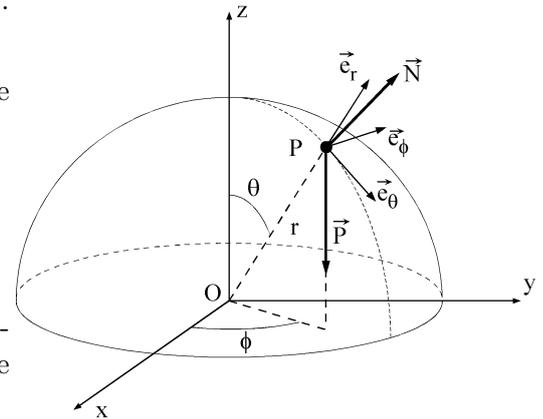
Système et repère : Le système est la masse m au point P . On choisit le repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ d'origine O .

Contrainte : Le point est astreint à se déplacer sur une sphère de rayon R : $r = R = \text{cst} \Rightarrow \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$.

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg (-\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_\theta)$,
- Réaction normale de la sphère : $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_r$.

- a) *Equation du mouvement* : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} = m \mathbf{a}$. En tenant compte des contraintes, l'accélération \mathbf{a} est exprimée en coordonnées sphériques comme,



$$\mathbf{a} = -R(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + R(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta) \mathbf{e}_\theta + R(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) \mathbf{e}_\phi .$$

L'équation du mouvement s'écrit donc en composantes comme,

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : N - mg \cos \theta = -mR(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) , \quad (141)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\theta : mg \sin \theta = mR(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta) , \quad (142)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : 0 = mR(\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta} \cos \theta) . \quad (143)$$

Etant donné que les forces extérieures \mathbf{P} et \mathbf{N} sont dans un plan perpendiculaire à \mathbf{e}_ϕ , il n'y a pas d'accélération selon la direction \mathbf{e}_ϕ . La masse commence à glisser sans vitesse initiale depuis le sommet. Par conséquent, son mouvement a lieu selon un angle ϕ constant, i.e. $\dot{\phi} = 0$ et $\ddot{\phi} = 0$. Ainsi l'équation (143) est identiquement nulle et les équations (141) et (142) se réduisent à la description d'un mouvement en coordonnées polaires dans un plan vertical, i.e.

$$N - mg \cos \theta = -mR\dot{\theta}^2 , \quad (144)$$

$$mg \sin \theta = mR\ddot{\theta} . \quad (145)$$

- b) La masse décolle de la sphère lorsque la réaction normale de la sphère devient nulle (i.e. $N = 0$). On quitte alors les conditions de contrainte. On résout les équations (144) et (145) par une **méthode à retenir**. On multiplie l'équation (145) par $\frac{\dot{\theta}}{mR}$, i.e.

$$\frac{g}{R} \dot{\theta} \sin \theta = \dot{\theta} \ddot{\theta} . \quad (146)$$

Les membres de gauche et de droite de l'équation peuvent être mis sous la forme de dérivées par rapport au temps, i.e.

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{g}{R} \cos \theta \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) . \quad (147)$$

En intégrant l'équation (147) par rapport au temps, on obtient,

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{R} \cos \theta + C . \quad (148)$$

où C est la constante d'intégration. En tenant compte des conditions initiales, i.e. $\theta = 0$ et $\dot{\theta} = 0 \Rightarrow C = g/R$, l'équation (148) devient,

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} (1 - \cos \theta) . \quad (149)$$

Lorsque la masse décolle (i.e. $N = 0$), l'équation du mouvement (144) peut être mise sous la forme,

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{g}{2R} \cos \theta . \quad (150)$$

Par comparaison des équations (149) et (150), la condition de décollage s'écrit

$$\cos \theta = \frac{2}{3} . \quad (151)$$

Il est important de constater que cette condition est indépendante de R , m et g . C'est un résultat purement géométrique!

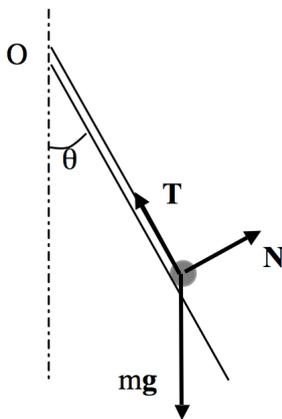
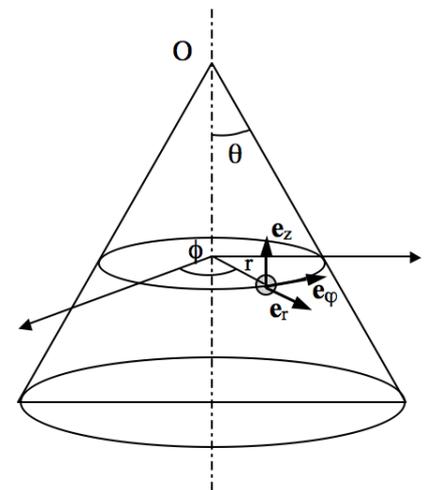
6.28 Point sur cône avec fil

On choisit un repère pratique pour exprimer les composantes des forces et les conditions imposées par les contraintes :

Coordonnées cylindriques : r, ϕ, z .

Contraintes : $r = r_0 = \text{const}$ et $z = \text{const}$

$$\Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0 \text{ et } \dot{z} = \ddot{z} = 0$$



Le point matériel est soumis aux forces suivantes :

- Tension du fil : $\mathbf{T} = T(-\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_z)$
- Réaction du cône : $\mathbf{N} = N(\cos \theta \mathbf{e}_r + \sin \theta \mathbf{e}_z)$
- Pesanteur : $m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$
- Frottement visqueux : $-b\mathbf{v} = -b(\dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi + \dot{z}\mathbf{e}_z) = -br_0\dot{\phi}\mathbf{e}_z$
- Force de traction : $\mathbf{F} = F\mathbf{e}_\phi$

- a) *Equations du mouvement* : $m\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_j = \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{e}_j$ où $\mathbf{F}_i = \mathbf{T}, \mathbf{N}, m\mathbf{g}, -b\mathbf{v}, \mathbf{F}$; $j = r, \phi, z$. Remarque : Pour l'expression de \mathbf{a} et \mathbf{v} , on prend les expressions du cours pour les coordonnées cylindriques. Cela donne les équations du mouvement :

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : -mr_0\dot{\phi}^2 = -T \sin \theta + N \cos \theta , \quad (152)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : mr_0\ddot{\phi} = -br_0\dot{\phi} + F , \quad (153)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_z : 0 = T \cos \theta + N \sin \theta - mg . \quad (154)$$

- b) Pour trouver T il faut combiner (152) et (154), mais il faut d'abord connaître le terme $mr_0\dot{\phi}^2$, i.e. $\dot{\phi}$. Pour cela, on considère (153) et on cherche une solution $\dot{\phi}(t)$:

$$\ddot{\phi} + (b/m)\dot{\phi} = F/mr_0 \quad (155)$$

L'équation homogène associée est $\ddot{\phi} + (b/m)\dot{\phi} = 0$, dont la solution est $\dot{\phi}(t) = A \exp(-bt/m)$; La solution est donc $\dot{\phi}(t) = A \exp(-bt/m) + F/br_0$. La condition initiale $\dot{\phi}(t=0) = 0$ détermine A et finalement :

$$\dot{\phi}(t) = F/br_0[1 - \exp(-bt/m)] \quad (156)$$

Par (152) et (154), on obtient :

$$N = -mr_0\dot{\phi}^2 \cos \theta + mg \sin \theta \quad (157)$$

$$T = mr_0\dot{\phi}^2 \sin \theta + mg \cos \theta \quad (158)$$

Remarque : Les forces des contraintes \mathbf{N} et \mathbf{T} dépendent de la vitesse $r_0\dot{\phi}^2$, donc ils varient avec le temps t .

c) La condition de décollage s'exprime comme $N = 0 \implies mr_0\dot{\phi}^2 \cos \theta = mg \sin \theta$. Et on obtient :

$$\dot{\phi} = \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta} \quad (159)$$

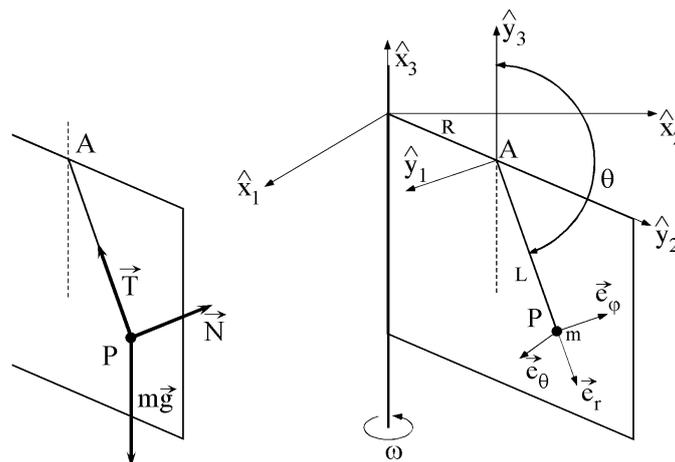
D'où, en reprenant l'expression (156),

$$F/br_0[1 - \exp(-bt/m)] = \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta} \implies t = -\left(\frac{m}{b}\right) \ln \left[1 - \left(\frac{br_0}{F}\right) \sqrt{\frac{g}{r_0} \tan \theta} \right] \quad (160)$$

Remarque : On observera le point décoller seulement si l'expression (160) admet des solutions, i.e. si $\left[1 - (br_0/F) \sqrt{g/r_0 \tan \theta} \right] > 0$, $(F/br_0) > \sqrt{g/r_0 \tan \theta}$, c'est-à-dire si la vitesse (angulaire) limite atteignable selon l'action de \mathbf{F} et le freinage dû au coefficient b est plus grande que la vitesse de décollage (qui dépend de la pesanteur et de θ).

Pour $t > 0$, $1 - (br_0/F) \sqrt{g/r_0 \tan \theta} < 1$

6.29 Pendule sur la porte



Système, référentiels et repères : Le système est le pendule qui est assimilé à un point matériel P de masse m . Le référentiel absolu est décrit par un repère cartésien $(O, \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_3)$ et le référentiel relatif de la porte est décrit par un repère cartésien $(A, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Y}_3)$ et un repère sphérique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$. Le référentiel relatif est en mouvement autour de l'axe \mathbf{X}_3 par rapport au référentiel absolu avec une vitesse angulaire ω constante.

Contraintes : La distance entre l'origine O du repère sur l'axe de rotation et le point d'attache du pendule est fixe, i.e. $|\mathbf{OA}| = R$. Le pendule est de longueur L , i.e. $r = L = \text{cste} \implies \dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$. Le

pendule se trouve dans le plan de la porte qui tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe de rotation, i.e. $\dot{\phi} = \omega = \text{cste} \Rightarrow \ddot{\phi} = 0$. L'origine O est sur l'axe de rotation. Donc, sa vitesse et son accélération absolue sont nulles, i.e. $\mathbf{v}_a(O) = \mathbf{0}$ et $\mathbf{a}_a(O) = \mathbf{0}$.

a) *Bilan des forces extérieures :*

- Poids : $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z = -mg(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta)$
où $\cos\theta < 0$ et $\sin\theta > 0$ pour $\pi/2 < \theta < \pi$,
- Réaction normale de la porte : $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_\phi$,
- Tension : $\mathbf{T} = -T\mathbf{e}_r$.

b) *Equation du mouvement :* $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = m\mathbf{a}_a(P)$ dans le référentiel absolu. En tenant compte de la contrainte, l'accélération absolue $\mathbf{a}_a(P)$ du pendule P est exprimée comme,

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}) ,$$

où

- $\mathbf{a}_a(A) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{OA}) = R\omega^2 \mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times \mathbf{Y}_2) = -R\omega^2 \mathbf{Y}_2 = -R\omega^2(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta)$,
- $\mathbf{a}_r(P) = -L\dot{\theta}^2\mathbf{e}_r + L\ddot{\theta}\mathbf{e}_\theta$,
- $2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_r(P) = 2\omega L\dot{\theta} \mathbf{Y}_3 \times \mathbf{e}_\theta = 2\omega L\dot{\theta}(\cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta) \times \mathbf{e}_\theta = 2\omega L\dot{\theta} \cos\theta\mathbf{e}_\phi$.
- $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{AP}) = L\omega^2 \mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times \mathbf{e}_r) = -L\omega^2 \sin\theta \mathbf{Y}_2 = -L\omega^2 \sin\theta(\sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta)$,

en utilisant

- $\mathbf{Y}_2 = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta$,
- $\mathbf{Y}_3 = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$.
- $\mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{Y}_3 \times (\mathbf{Y}_3 \times (\sin\theta\mathbf{Y}_2 + \cos\theta\mathbf{Y}_3)) = -\sin\theta\mathbf{Y}_2$.

L'équation du mouvement s'écrit donc en composantes comme,

$$\text{selon } \mathbf{e}_r : \quad -mg \cos\theta - T = -m\left(\omega^2(R + L \sin\theta) \sin\theta + L\dot{\theta}^2\right) , \quad (161)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\theta : \quad mg \sin\theta = -m\left(\omega^2(R + L \sin\theta) \cos\theta - L\ddot{\theta}\right) , \quad (162)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_\phi : \quad N = 2m\omega L\dot{\theta} \cos\theta . \quad (163)$$

6.32 Le swing du golfeur

- a) Le mouvement du point A est supposé connu, donc donné par une fonction $\alpha = \alpha(t)$ de telle sorte que $\dot{\alpha}$ et $\ddot{\alpha}$ sont aussi connus. On a : $\boldsymbol{\omega} = \dot{\alpha} + \dot{\theta}$.
- b) \mathbf{v}_A et \mathbf{a}_A sont à considérer comme connus. $\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP}$ implique $\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \wedge \mathbf{AP}$, d'où

$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_A + (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \wedge \mathbf{AP} + (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \wedge \left((\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \wedge \mathbf{AP} \right)$$

- c) On nous donne que la force exercée sur P est le long de \mathbf{AP} . La projection de $\mathbf{F} = m\mathbf{a}_P$ sur \mathbf{e}_θ donne $m\mathbf{a}_P \cdot \mathbf{e}_\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta = 0$. On note que \mathbf{e}_θ est dans la direction de $\dot{\alpha} \wedge \mathbf{AP}$, $\dot{\theta} \wedge \mathbf{AP}$ et $(\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \wedge \mathbf{AP}$. Le troisième terme de \mathbf{a}_P ne contribue donc pas à cette projection. Il reste ainsi $0 = \{\mathbf{a}_A + (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \wedge \mathbf{AP}\} \cdot \mathbf{e}_\theta$. On veut expliciter \mathbf{a}_A . On peut procéder de la manière suivante quand on a l'habitude du mouvement circulaire. On sait qu'on a une composante centripète et une tangentielle. Avec le choix d'axes Ax' et Ay' , en se référant aux formules pour l'accélération en coordonnées cylindriques, avec le choix d'axe utilisé ici, on écrit immédiatement : $\mathbf{a}_A = +R\dot{\alpha}^2\hat{\mathbf{x}}' - R\ddot{\alpha}\hat{\mathbf{y}}'$. Or par inspection du dessin : $\hat{\mathbf{x}}' = \cos\theta\mathbf{e}_r - \sin\theta\mathbf{e}_\theta$ et $\hat{\mathbf{y}}' = \sin\theta\mathbf{e}_r + \cos\theta\mathbf{e}_\theta$. Donc

$$\mathbf{a}_A \cdot \mathbf{e}_\theta = R\dot{\alpha}^2(-\sin\theta) - R\ddot{\alpha} \cos\theta$$

L'équation du mouvement de A , dans la direction \mathbf{e}_θ devient ainsi

$$0 = -\dot{\alpha}^2 \sin \theta - \ddot{\alpha} \cos \theta + (\ddot{\theta} + \ddot{\alpha}) \left(\frac{L}{R} \right)$$

6.33 La fusée

- a) La 2^e loi de Newton appliquée à la fusée, qui est un système de masse $M + m$ variable avec une vitesse d'éjection \mathbf{u} , est donnée par,

$$(M + m) \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} + \frac{d(M + m)}{dt} \mathbf{u} , \quad (164)$$

où la masse M de la fusée à vide est constante (i.e. $dM/dt = 0$) et le débit de gaz brûlés est négatif (i.e. $dm/dt < 0$) puisque la fusée perd du combustible. La seule force extérieure qui agit sur le système est le poids de la fusée et de son combustible, i.e.

$$\mathbf{F} = (M + m) \mathbf{g} . \quad (165)$$

Par conséquent, l'accélération de la fusée est de la forme,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{g} + \frac{1}{M + m} \frac{dm}{dt} \mathbf{u} . \quad (166)$$

Le mouvement de la fusée a lieu selon l'axe vertical z défini par le vecteur orthonormé \mathbf{e}_z dirigé vers le haut. On projète d'abord les vecteurs selon l'axe vertical, i.e.

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_z , \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{u} = -u \mathbf{e}_z ,$$

puis l'équation du mouvement (166), i.e.

$$\frac{dv}{dt} = -g - \frac{u}{M + m} \frac{dm}{dt} . \quad (167)$$

La condition de décollage est une accélération positive de la fusée vers le haut (i.e. $dv/dt > 0$). Cette condition se traduit dans l'équation du mouvement (167) par,

$$\left| \frac{dm}{dt} \right| = - \underbrace{\frac{dm}{dt}}_{<0} > \frac{(M + m) g}{u} . \quad (168)$$

Par conséquent, si le débit $\left| \frac{dm}{dt} \right|$ de gaz brûlés par la fusée lors de son lancement est supérieur à $\frac{(M+m)g}{u}$ la fusée décolle!

- b) La masse de combustible suit la loi d'évolution,

$$m = m_0 \left(1 - \frac{t}{\tau} \right) . \quad (169)$$

Ainsi, la dérivée temporelle de cette relation vaut,

$$\frac{dm}{dt} = - \frac{m_0}{\tau} . \quad (170)$$

En substituant l'équation (169), évaluée au temps de décollage $t = 0$, et l'équation (170) dans la condition de décollage (168), celle-ci se réduit à

$$\frac{m_0}{\tau} > \frac{(M + m_0) g}{u} \quad \Rightarrow \quad \tau < \frac{u}{g} \frac{m_0}{M + m_0} . \quad (171)$$

c) En substituant les relations (169) et (170) dans l'équation du mouvement (167), celle-ci devient,

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{u}{\tau} \frac{1}{\left(1 + \frac{M}{m_0}\right) - \frac{t}{\tau}} \quad \Rightarrow \quad dv = -g\tau d\left(\frac{t}{\tau}\right) - u \frac{d\left(\frac{t}{\tau}\right)}{\frac{t}{\tau} - \left(1 + \frac{M}{m_0}\right)}. \quad (172)$$

En intégrant l'équation (172) on obtient,

$$v(t) = -gt - u \ln \left(C \left(\frac{t}{\tau} - \left(1 + \frac{M}{m_0}\right) \right) \right), \quad (173)$$

où C est une constante d'intégration. La condition initiale sur la vitesse avant le décollage de la fusée, i.e. $v(0) = 0$, implique que

$$\ln \left(-C \left(1 + \frac{M}{m_0}\right) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -C \left(1 + \frac{M}{m_0}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{m_0}{M + m_0}. \quad (174)$$

Ainsi, l'expression de la vitesse (173) devient,

$$v(t) = -gt - u \ln \left(1 - \left(\frac{m_0}{M + m_0} \right) \frac{t}{\tau} \right). \quad (175)$$

6.35 Cavité sous terre

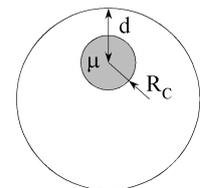
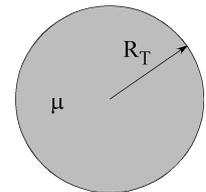
a) A la surface de la terre, le champ de gravitation créé g_0 par la terre "pleine" est de la forme,

$$g_0 = \frac{G\mu V_T}{R_T^2}, \quad (176)$$

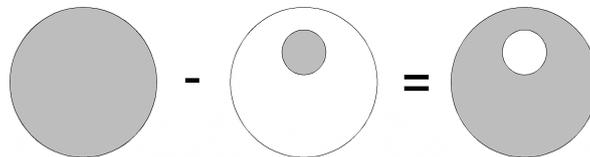
où μ est la masse volumique de la terre, R_T est le rayon terrestre et $V_T = \frac{4}{3}\pi R_T^3$ est le volume de la terre.

Le champ g_c que créerai à la surface de la terre une sphère de rayon R_C , de densité μ et de volume $V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3$ dont le centre se situe à une distance d sous la surface de la terre est donné par,

$$g_c = \frac{G\mu V_C}{d^2}. \quad (177)$$



Le principe d'additivité permet d'écrire que le champ g_1 ressenti juste au-dessus de la cavité, i.e.



$$g_1 = g_0 - g_c = G\mu \left(\frac{V_T}{R_T^2} - \frac{V_C}{d^2} \right) = \frac{4}{3}\pi G\mu \left(R_T - \frac{R_C^3}{d^2} \right), \quad (178)$$

b) Soit $d = R$. Dans ce cas, l'expression de la précision relative δ est de la forme,

$$\delta = \frac{g_1 - g_0}{g_0} = \frac{\frac{4}{3}\pi G\mu R_T - \frac{4}{3}\pi G\mu (R_T - R_C)}{\frac{4}{3}\pi G\mu R_T} = \frac{R_C}{R_T}. \quad (179)$$

Application numérique : $\delta = 10^{-6} \Rightarrow R_C = 6.38 \text{ m}$.

6.36 Tube cathodique

- a) *Système et repère* : Le système est la particule de masse m et de charge électrique q . On choisit comme référentiel le condensateur et comme repère le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ d'origine O centrée à l'entrée du condensateur.

Conditions initiales :

- Position initiale : $\mathbf{x}(0) \equiv \mathbf{x}_0 = (0, 0)$,
- Vitesse initiale : $\mathbf{v}(0) \equiv \mathbf{v}_0 = (v_0, 0)$.

Bilan des forces extérieures :

- Force électrostatique : $\mathbf{F}_e = q\mathbf{E} = qE \mathbf{e}_y$.

Equation du mouvement : $\Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}} = \mathbf{F}_e = m \mathbf{a}$. La projection de cette équation vectorielle sur les axes du repère cartésien donne,

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : 0 = m\ddot{x} , \quad (180)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_y : qE = m\ddot{y} . \quad (181)$$

- b) En intégrant les équations du mouvement (180) et (181) par rapport au temps tout en tenant compte des conditions initiales, on trouve l'expression de la vitesse, i.e.

$$\dot{x}(t) = v_0 , \quad (182)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{qE}{m} t . \quad (183)$$

En intégrant les équations (182) et (183) par rapport au temps tout en tenant compte des conditions initiales, on trouve l'équation horaire, i.e.

$$x(t) = v_0 t , \quad (184)$$

$$y(t) = \frac{qE}{2m} t^2 . \quad (185)$$

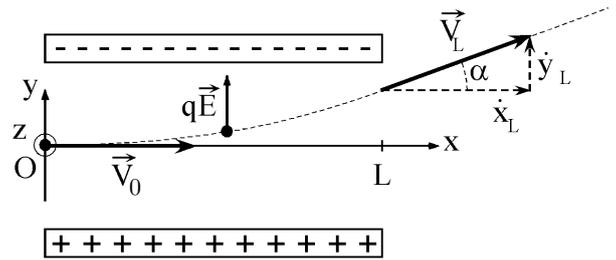
La sortie du condensateur est déterminée par la condition $x = L$. L'équation horaire (184) implique que cette sortie a lieu au temps $t_L = \frac{L}{v_0}$. Au temps t_L , les composantes de la vitesse sont données par,

$$\dot{x}(t_L) = v_0 , \quad (186)$$

$$\dot{y}(t_L) = \frac{qEL}{mv_0} . \quad (187)$$

L'angle α de la trajectoire de la particule par rapport à l'horizontale correspond à l'orientation du vecteur vitesse. Par conséquent,

$$\tan \alpha = \frac{\dot{y}(t_L)}{\dot{x}(t_L)} = \frac{qEL}{mv_0^2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan \left(\frac{qEL}{mv_0^2} \right) . \quad (188)$$

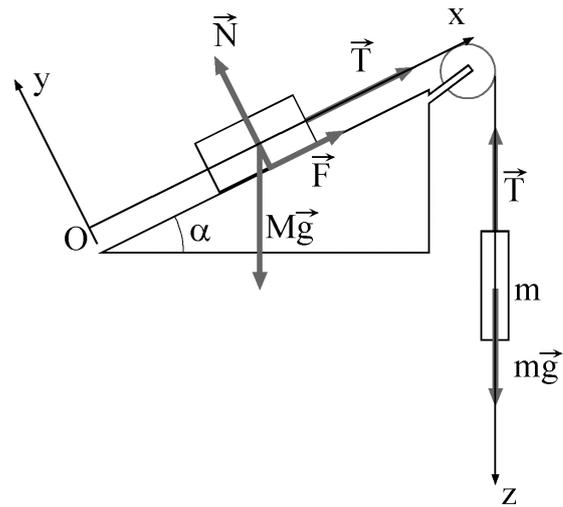


6.39 Plot sur plan incliné

- a) Vaincre le frottement statique revient à trouver la force limite $\mathbf{F}_{max} = \mu_s \mathbf{N}$. On résout donc le problème statique.

Système et repère : Le système est la masse M . On choisit le repère cartésien défini par Oxy , $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$ d'origine O .

Contrainte : Le plot est astreint à se déplacer sur le plan incliné : $y = \text{cst} \Rightarrow \dot{y} = 0$ et $\ddot{y} = 0$



Bilan des forces extérieures :

- Pesanteur : $\mathbf{P} = m \mathbf{g} = mg (-\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y)$,
- Réaction du plan incliné (contrainte) : $\mathbf{N} = N \mathbf{e}_y$.
- Force de frottement statique : $\mathbf{F} = F \mathbf{e}_x = \mu_s N \mathbf{e}_x$
qui s'oppose à tout mouvement, le signe de F est inconnu et sera donné par la résolution, on l'écrit positif à priori.
- Traction du fil : $\mathbf{T} = T \mathbf{e}_x$
La norme T est celle exercée par la masse m sur le fil (le fil "transmet" intégralement cette force). On la détermine par la résolution du problème statique du système formé par la masse m ; la projection sur l'axe z des forces de pesanteur et de traction donne $T = mg$ Ainsi, pour la masse M , $\mathbf{T} = mg \mathbf{e}_x$

Equation du mouvement : $m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}}$, avec projection sur les axes :

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : -Mg \sin \alpha + mg + F = 0 \quad (189)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_y : -Mg \cos \alpha + N = 0 \quad (190)$$

L'équation (327) donne : $N = Mg \cos \alpha$. On a donc $F = \mu_s N = \mu_s Mg \cos \alpha$.

On injecte cette dernière relation dans (325), en distinguant deux cas possibles :

1. Masse m maximum (on rajoute du lest) : la valeur de F est négative car elle s'oppose à une force de traction vers les x positifs. Ainsi, (325) devient :

$$-Mg \sin \alpha + m_{max}g - \mu_s Mg \cos \alpha = 0 \quad (191)$$

On en déduit :

$$m_{max} = M(\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha) \quad (192)$$

2. Masse m minimum (on allège le lest) : la valeur de F est positive, car elle s'oppose au glissement de la masse M vers les x négatifs. On réécrit alors (325) comme :

$$-Mg \sin \alpha + m_{min}g + \mu_s Mg \cos \alpha = 0 \quad (193)$$

On en déduit :

$$m_{min} = M(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha) \quad (194)$$

Dans ce cas, on peut avoir $m_{min} = 0$ si $\sin \alpha \leq \mu_s \cos \alpha$ (plan faiblement incliné).

- b) On passe au cas dynamique. La résolution est identique à celle proposée ci-dessus, jusqu'à l'estimation de la force de frottement :

- Force de frottement dynamique : $\mathbf{F} = -\mu_d N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \mathbf{e}_x$ qui s'oppose au mouvement.

- Traction du fil : $\mathbf{T} = T \mathbf{e}_x$.

T est déterminée par l'équation du mouvement de la masse m . Sur l'axe z , la seconde loi de Newton donne $m\ddot{z} = mg - T$. Comme les masses sont liées par un câble rigide (inextensible), alors leurs mouvements sont couplés et $\ddot{z} = \ddot{x}$. Ainsi, $T = m(g - \ddot{x})$ et donc $\mathbf{T} = m(g - \ddot{x}) \mathbf{e}_x$.

Equation du mouvement : $m\mathbf{a} = \Sigma \mathbf{F}^{\text{ext}}$, avec projection sur les axes :

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : -Mg \sin \alpha + m(g - \ddot{x}) - \mu_d N \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} = M\ddot{x} \quad (195)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_y : -Mg \cos \alpha + N = 0 \quad (196)$$

L'équation (196) donne : $N = Mg \cos \alpha$. Injecté dans (195), on écrit alors l'équation du mouvement :

$$(M + m)\ddot{x} = mg - Mg \left(\sin \alpha + \mu_d \cos \alpha \frac{\dot{x}}{|\dot{x}|} \right) \quad (197)$$

6.43 La grosse Bertha

- a) *Conservation de la quantité de mouvement :*

Avant le tir, le système composé du canon et du boulet est au repos dans le référentiel terrestre. Par conséquent, la somme vectorielle de la quantité de mouvement totale est nulle. Par conservation de la quantité de mouvement lors du tir, la somme vectorielle des quantités de mouvement du canon et du boulet est encore nulle juste après le tir, i.e.

$$M\mathbf{V} + m\mathbf{v} = \mathbf{0} , \quad (198)$$

où M et m sont respectivement les masses du canon et du boulet, et \mathbf{V} et \mathbf{v} sont respectivement les vitesses du canon et du boulet juste après le tir. Il est utile de mentionner que la durée du tir est suffisamment courte pour que l'action de la force de pesanteur soit négligeable et qu'ainsi la quantité de mouvement totale du système soit conservée. En projetant l'équation de conservation de la quantité de mouvement selon la ligne de tir, on obtient,

$$-MV + mv = 0 . \quad (199)$$

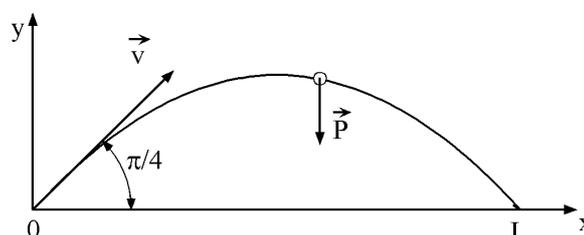
Ainsi la norme V de la vitesse de recul du canon juste après le tir est de la forme,

$$V = \frac{m}{M} v . \quad (200)$$

L'énergie cinétique du canon K due au mouvement de recul que le dispositif d'amortissement devait absorber est donnée par,

$$K = \frac{1}{2} MV^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2}{M} v^2 . \quad (201)$$

La détermination de la norme de la vitesse v du boulet juste après le tir en fonction de la portée au sol est un problème de balistique qui a déjà été traité dans la série d'exercices sur la balistique. La trajectoire balistique du boulet après le tir se trouve dans le plan vertical Oxy (cf. figure ci-dessous).



Elle est décrite par le système d'équations,

$$x(t) = v \cos \alpha t, \quad (202)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v \sin \alpha t, \quad (203)$$

où α est l'angle entre la ligne de tir et l'horizontale. Lorsque le boulet atteint le sol au temps t_f et au point d'impact $(x(t_f), y(t_f)) = (L, 0)$, les équations balistiques (202) et (203) satisfont,

$$L = v \cos \alpha t_f, \quad (204)$$

$$0 = -\frac{1}{2}gt_f^2 + v \sin \alpha t_f. \quad (205)$$

Des équations (204) et (205), on tire l'expression de la norme de la vitesse initiale, i.e.

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2 \sin \alpha \cos \alpha}} = \sqrt{\frac{gL}{\sin(2\alpha)}}. \quad (206)$$

Par conséquent, la longueur de tir L est donnée par,

$$L = \frac{v^2}{g} \sin(2\alpha). \quad (207)$$

La portée du canon correspond à la longueur de tir maximale qui est atteinte pour un angle de tir $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, l'expression (206) pour la vitesse se réduit à

$$v = \sqrt{gL}. \quad (208)$$

Finalement, l'énergie cinétique du canon (201) que le dispositif d'amortissement devait absorber se réduit à,

$$K = \frac{1}{2} \frac{m^2 g L}{M}. \quad (209)$$

Application numérique : $K = 1962 \text{ J}$.

6.2 Solide indéformable

6.50 Piston/bielle

- a) Un point P quelconque de la barre AB est repéré par sa distance h au point A . Dans un repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y)$, la position \mathbf{x}_P de P est donnée par,

$$\mathbf{x}_P = h \sin \alpha \mathbf{e}_x + \left(R \cos \theta + (L - h) \cos \alpha \right) \mathbf{e}_y . \quad (210)$$

La vitesse \mathbf{v}_P est obtenue par dérivation de \mathbf{x}_P par rapport au temps, i.e.

$$\mathbf{v}_P = h \dot{\alpha} \cos \alpha \mathbf{e}_x - \left(R \dot{\theta} \sin \theta + (L - h) \dot{\alpha} \sin \alpha \right) \mathbf{e}_y . \quad (211)$$

- b) De manière similaire, la position \mathbf{x}_A et la vitesse \mathbf{v}_A du point A (i.e. $h = 0$) sont respectivement exprimés dans un repère cartésien comme,

$$\mathbf{x}_A = \left(R \cos \theta + L \cos \alpha \right) \mathbf{e}_y , \quad (212)$$

$$\mathbf{v}_A = - \left(R \dot{\theta} \sin \theta + L \dot{\alpha} \sin \alpha \right) \mathbf{e}_y . \quad (213)$$

Les expressions des vitesses (211) et (213) sont liées par

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + h \dot{\alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) . \quad (214)$$

D'autre part,

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{AP} = \dot{\alpha} \mathbf{e}_z \times h (\sin \alpha \mathbf{e}_x - \cos \alpha \mathbf{e}_y) = h \dot{\alpha} (\cos \alpha \mathbf{e}_x + \sin \alpha \mathbf{e}_y) . \quad (215)$$

Les équations (214) et (215) impliquent que,

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_A + \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{AP} . \quad (216)$$

- c) Les angles θ et α ne sont pas indépendants. Ils sont liés par

$$R \sin \theta = L \sin \alpha , \quad (217)$$

dont la dérivée par rapport au temps vaut,

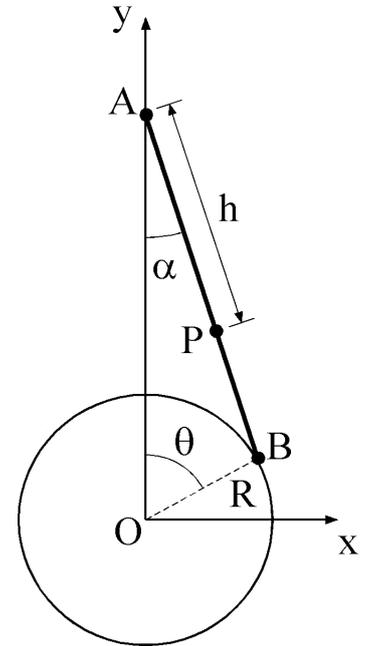
$$R \dot{\theta} \cos \theta = L \dot{\alpha} \cos \alpha . \quad (218)$$

En utilisant la relation (218), l'équation (211) peut être mise sous la forme,

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_P &= \dot{\alpha} \left\{ h \cos \alpha \mathbf{e}_x - \left(L \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \sin \alpha \right) \mathbf{e}_y \right\} \\ &= \dot{\alpha} \mathbf{e}_z \times \left\{ - \left(L \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \sin \alpha \right) \mathbf{e}_x - h \cos \alpha \mathbf{e}_y \right\} \\ &= \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \left\{ - \left(L \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \sin \alpha \right) \mathbf{e}_x - h \cos \alpha \mathbf{e}_y \right\} = \dot{\boldsymbol{\alpha}} \times \mathbf{IP} . \end{aligned} \quad (219)$$

Par conséquent,

$$\mathbf{IP} = \mathbf{x}_P - \mathbf{x}_I = - \left(L \cos \alpha \tan \theta + (L - h) \sin \alpha \right) \mathbf{e}_x - h \cos \alpha \mathbf{e}_y . \quad (220)$$



Finalement, les équations (210), (217) et (220) impliquent que la position \mathbf{x}_I du point I est de la forme,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_I = \mathbf{x}_P - \mathbf{IP} &= L(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \theta) \mathbf{e}_x + (R \cos \theta + L \cos \alpha) \mathbf{e}_y \\ &= L \left[(\sin \alpha + \cos \alpha \tan \theta) \mathbf{e}_x + \left(\frac{\sin \alpha}{\tan \theta} + \cos \alpha \right) \mathbf{e}_y \right].\end{aligned}\quad (221)$$

Physiquement, le point I représente le centre instantané de rotation.

6.51 Hypocycloïde

- a) La vitesse \mathbf{v}_M d'un point quelconque M du petit cylindre est donnée par

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \dot{\psi} \times \mathbf{AM}, \quad (222)$$

où $\dot{\psi}$ est le vecteur axial de rotation propre du petit cylindre. Dans le cas particulier du point de contact P (i.e. $M = P$), la condition de roulement sans glissement,

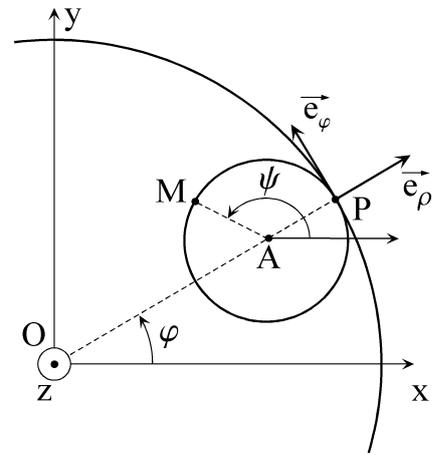
$$\mathbf{v}_P = \mathbf{0}, \quad (223)$$

et l'expression de la vitesse du centre de masse du petit cylindre

$$\mathbf{v}_A = \dot{\varphi} \times \mathbf{OA}, \quad (224)$$

impliquent que l'équation (222) se réduit à,

$$\dot{\varphi} \times \mathbf{OA} + \dot{\psi} \times \mathbf{AP} = \mathbf{0}. \quad (225)$$



La projection des deux termes de l'équation (225) dans le repère cylindrique ($\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z$) donne

$$\begin{aligned}\dot{\varphi} \times \mathbf{OA} &= (R - R') \dot{\varphi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = (R - R') \dot{\varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \dot{\psi} \times \mathbf{AP} &= R' \dot{\psi} \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_\rho = R' \dot{\psi} \mathbf{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Ainsi la projection de l'équation (225) selon l'axe \mathbf{e}_φ donne,

$$(R - R') \dot{\varphi} + R' \dot{\psi} = 0. \quad (226)$$

- b) Le vecteur \mathbf{OM} est exprimée en coordonnées cartésiennes comme, i.e.

$$\mathbf{OM} = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} = (R - R') \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + R' \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (227)$$

Les équations paramétriques de l'hypocycloïde sont donc de la forme,

$$\begin{aligned}x_M &= (R - R') \cos \varphi + R' \cos \psi, \\ y_M &= (R - R') \sin \varphi + R' \sin \psi.\end{aligned}\quad (228)$$

Les angles φ et ψ sont couplés. On peut définir leur couplage en intégrant la condition (226) de roulement sans glissement par rapport au temps. Il y a donc un seul degré de liberté : φ ou ψ .

6.60 Projectile contre solide

- a) La quantité de mouvement dans le plan de glissement est conservée parce qu'on suppose qu'aucune force n'agit sur le système global. Il y a toutefois des forces intérieures qui, on le présume, travaillent induisant la non conservation de l'énergie. Le raisonnement sur la quantité de mouvement donne la vitesse après le choc :

$$P_{tot} = m\mathbf{v}_i = (M + m)\mathbf{V}_f \implies \mathbf{V}_f = \frac{m}{M + m}\mathbf{v}_i \approx \frac{m}{M}\mathbf{v}_i \quad (229)$$

Le centre de masse suit ainsi une trajectoire rectiligne dans la même direction que le projectile au moment de l'impact.

- b) S'il y a tout de même une force qui s'exerce, elle est normale au plan. Le moment de cette force en n'importe quel point du plan est donc dans le plan, alors la projection du moment cinétique sur la normale au plan est conservée.
- c) Soit O un point choisi du plan. Le moment cinétique en ce point est donné par :

$$\mathbf{L}_O = \underbrace{\mathbf{OA} \wedge m\mathbf{v}_i}_{\text{projectile, avant collision}} = \underbrace{m\mathbf{OA} \wedge (\mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA})}_{\text{projectile, après collision}} + \underbrace{\mathbf{OG} \wedge M\mathbf{V}_G + I_G\boldsymbol{\omega}}_{\text{cube, après collision}}, \quad (230)$$

où l'on a exprimé le moment cinétique après le choc comme la somme du moment cinétique de la masse m et du cube.

Lorsqu'on développe ce terme en notant que $\mathbf{OA} = \mathbf{OG} + \mathbf{GA}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= m\mathbf{OG} \wedge \mathbf{V}_G + m\mathbf{GA} \wedge \mathbf{V}_G + m\mathbf{OG} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA}) + m\mathbf{GA} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA}) \\ &\quad + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{V}_G + I_G\boldsymbol{\omega} \quad (231) \\ &= \mathbf{OG} \wedge (M + m)\mathbf{V}_G + \left(I_G + \underbrace{\left| m\mathbf{GA} \wedge \left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\omega} \wedge \mathbf{GA} \right) \right|}_{=m|\mathbf{GA}|^2} \right) \boldsymbol{\omega} \\ &\quad + \underbrace{m\mathbf{GA} \wedge \mathbf{V}_G}_{(1)} + \underbrace{m\mathbf{OG} \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA})}_{(2)} \quad (232) \end{aligned}$$

En se souvenant que $m \ll M$, et donc que le centre de gravité G demeure inchangé, cela donne :

$$\mathbf{OA} \wedge m\mathbf{v}_i = \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{V}_G + I'_G\boldsymbol{\omega} \quad (233)$$

Avec :

$$I'_G = I_G + m|\mathbf{GA}|^2 = I_G + m\frac{L^2}{2} \quad (234)$$

On remarque que l'approximation $m \ll M$ revient à négliger les termes (1) et (2) dans l'équation 232. En fait, ces deux termes s'annuleraient si l'on plaçait une masse m identique au coin C du cube, de manière à conserver le même centre de gravité G . En projection on obtient :

$$-msv_i = -\left(s + \frac{L}{2}\right) M \underbrace{\frac{mv_i}{M}}_{\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_f} + I'_G\boldsymbol{\omega} \quad (235)$$

Avec s le paramètre d'impact donné par :

$$s = \left| \mathbf{OA} \wedge \frac{\mathbf{v}_i}{v_i} \right| \quad (236)$$

On obtient finalement la vitesse angulaire de rotation du cube ω après le choc :

$$\omega = \frac{Lmv_i}{2I'_G} \quad (237)$$

d) La vitesse en A est donnée par

$$\mathbf{v}(A) = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA} \quad (238)$$

Attention, cette fois $\mathbf{V}_G \neq \mathbf{V}_f$, sauf juste après le choc. Il faudra donc écrire $\mathbf{V}_G = \dot{x}\mathbf{e}_x + \dot{y}\mathbf{e}_y$.

En remarquant que $|\mathbf{GA}| = \frac{L\sqrt{2}}{2}$, on arrive à

$$\mathbf{v}(A) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{L\sqrt{2}}{2} \cos \theta \\ \frac{L\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} - \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \sin \theta \\ \dot{y} + \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (239)$$

Ce qui donne les équations du mouvement suivantes :

$$M\ddot{x} = -b\left(\dot{x} - \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \sin \theta\right) \quad (240)$$

$$M\ddot{y} = -b\left(\dot{y} + \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \cos \theta\right) \quad (241)$$

Avec $\dot{\theta} = \omega$.

e) Le théorème du moment cinétique appliqué au point G s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} &= I'_G \ddot{\theta} \mathbf{e}_z = \mathbf{GA} \wedge (-b\mathbf{v}(A)) = \mathbf{GA} \wedge (-b(\mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{GA})) \\ &= -b \frac{L\sqrt{2}}{2} \left(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta + \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (242)$$

Avec toujours $\dot{\theta} = \omega$. En projection selon \mathbf{e}_z l'on obtient ainsi :

$$I'_G \ddot{\theta} = -b \frac{L\sqrt{2}}{2} \left(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta + \omega \frac{L\sqrt{2}}{2} \right) \quad (243)$$

6.61 Chute d'une barre en milieu visqueux

a) La vitesse du centre de masse s'écrit : $v_G = \dot{\theta} \frac{L}{2}$

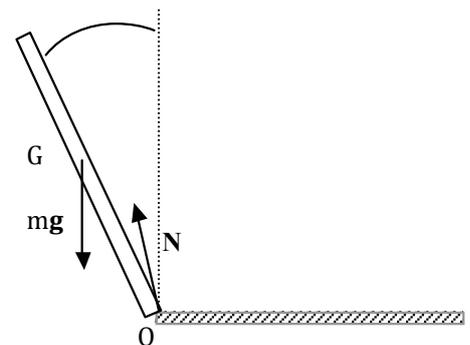
En appliquant la conservation de l'énergie, on a :

$$E_{initiale} = E_{finale} \Rightarrow mg \frac{L}{2} = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\theta}^2 \quad (244)$$

$$mgL = \dot{\theta}^2 \left[m \left(\frac{L}{2} \right)^2 + I_G \right] \quad (245)$$

Rappel : pour une barre, $I_G = m \frac{L^2}{12}$, on obtient :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgL}{m \frac{L^2}{4} + I_G} \Rightarrow v_G = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{mgL}{m \frac{L^2}{4} + I_G}} \quad (246)$$



b) On a :

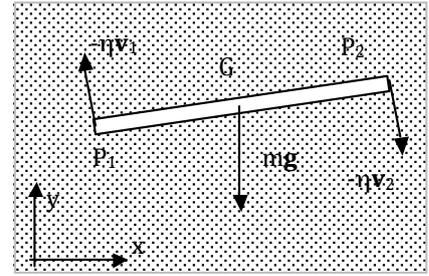
$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_G + (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_i) \quad (247)$$

avec $i = 1, 2$ indice des extrémités respectives de la barre.

La somme des forces $\Sigma \mathbf{F}^{ext}$ s'écrit donc :

$$m\mathbf{g} - \eta \left[\mathbf{v}_G + (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1) \right] - \eta \left[\mathbf{v}_G + (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_2) \right] \quad (248)$$

Ce qui donne $\Sigma \mathbf{F}^{ext} = m\mathbf{g} - 2\eta\mathbf{v}_G$
car $\mathbf{GP}_1 = -\mathbf{GP}_2$.



Remarque : \mathbf{v}_G et $\dot{\boldsymbol{\theta}}$ varient avec le temps et sont déterminés par les équations du mouvement données en c) et d).

c) Par le point précédent, $m\dot{\mathbf{v}}_G = m\mathbf{g} - 2\eta\mathbf{v}_G$. Si la vitesse d'arrivée, initiale, de la barre dans le liquide n'a pas de composante sur z , alors on a :

$$\text{Sur } x : \quad \dot{v}_{Gx} = -2\frac{\eta}{m}v_{Gx} \quad \text{Sur } y : \quad \dot{v}_{Gy} = -g - 2\frac{\eta}{m}v_{Gy} \quad (249)$$

On pourrait également écrire ces résultats avec x_G et y_G .

d) On applique le théorème du moment cinétique appliqué en G :

$$\begin{aligned} I_G \ddot{\boldsymbol{\theta}} &= \mathbf{GP}_1 \wedge \left\{ -\eta \left[\mathbf{v}_G + (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1) \right] \right\} + \mathbf{GP}_2 \wedge \left\{ -\eta \left[\mathbf{v}_G + (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_2) \right] \right\} \\ &= -2\eta \mathbf{GP}_1 \wedge (\dot{\boldsymbol{\theta}} \wedge \mathbf{GP}_1) \end{aligned} \quad (250)$$

La projection sur z donne l'équation du mouvement pour la vitesse de rotation instantanée :

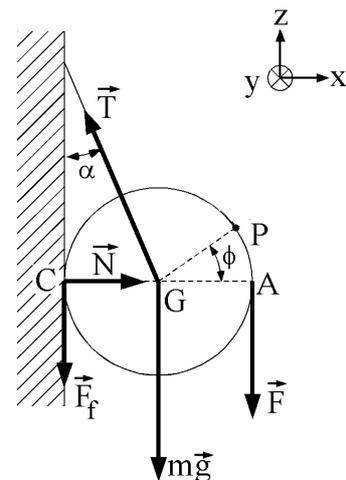
$$I_G \ddot{\theta} = -2\eta \left(\frac{L}{2} \right)^2 \dot{\theta} \quad (251)$$

6.63 Rouleau de papier

Système et repère : Le système est le rouleau de papier de masse m . On choisit le repère cartésien $(\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$.

Bilan des forces extérieures :

- Poids : $\mathbf{P} = m\mathbf{g} = -mg\mathbf{e}_z$,
- Réaction normale du mur : $\mathbf{N} = N\mathbf{e}_x$,
- Tension résultante dans les barres :
 $\mathbf{T} = T(-\sin\alpha\mathbf{e}_x + \cos\alpha\mathbf{e}_z)$,
- Force de frottement sec du papier contre le mur :
 $\mathbf{F}_f = -\mu_c N\mathbf{e}_z$,
- Force de traction verticale sur le papier : $\mathbf{F} = -F\mathbf{e}_z$.



a) *Théorème du centre de masse* :

$$\Sigma \mathbf{F}^{ext} = \mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} + \mathbf{F}_f + \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G. \quad (252)$$

La dynamique a lieu dans le plan $O\mathbf{e}_x\mathbf{e}_z$. Le centre de masse est immobile, i.e. $\mathbf{a}_G = \mathbf{0}$. La projection du théorème du centre de masse (252) sur les axes du repère cartésien donne,

$$\text{selon } \mathbf{e}_x : \quad -T \sin\alpha + N = 0, \quad (253)$$

$$\text{selon } \mathbf{e}_z : -mg + T \cos \alpha - F - \mu_c N = 0 . \quad (254)$$

Du système d'équations (253) et (254), on tire,

$$T = \frac{mg + F}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} , \quad (255)$$

$$N = \frac{(mg + F) \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} . \quad (256)$$

Théorème du moment cinétique (en G) : $\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt}$.

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \underbrace{\mathbf{G}\mathbf{G} \wedge \mathbf{P}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{G}\mathbf{C} \wedge \mathbf{N}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{G}\mathbf{G} \wedge \mathbf{T}}_{=0} + \mathbf{G}\mathbf{C} \wedge \mathbf{F}_f + \mathbf{G}\mathbf{A} \wedge \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} . \quad (257)$$

La somme des moments de forces appliqués au centre de masse G vaut,

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = R\mu_c N \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z - RF \mathbf{e}_x \wedge \mathbf{e}_z = R(F - \mu_c N) \mathbf{e}_y . \quad (258)$$

Le moment cinétique du rouleau par rapport au centre de masse G vaut,

$$\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\omega} = I_G \dot{\phi} \mathbf{e}_y \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = I_G \ddot{\phi} \mathbf{e}_y , \quad (259)$$

où $\dot{\phi}$ est défini positif pour une rotation dans le sens des aiguilles d'une montre. Le théorème du moment cinétique (257) implique que

$$I_G \ddot{\phi} = R(F - \mu_c N) . \quad (260)$$

L'accélération angulaire du rouleau est obtenue en substituant l'expression (256) de la réaction normale dans l'équation du mouvement (260), i.e.

$$\ddot{\phi} = \frac{R}{I_G} \left(F - \frac{(mg + F) \mu_c \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu_c \sin \alpha} \right) . \quad (261)$$

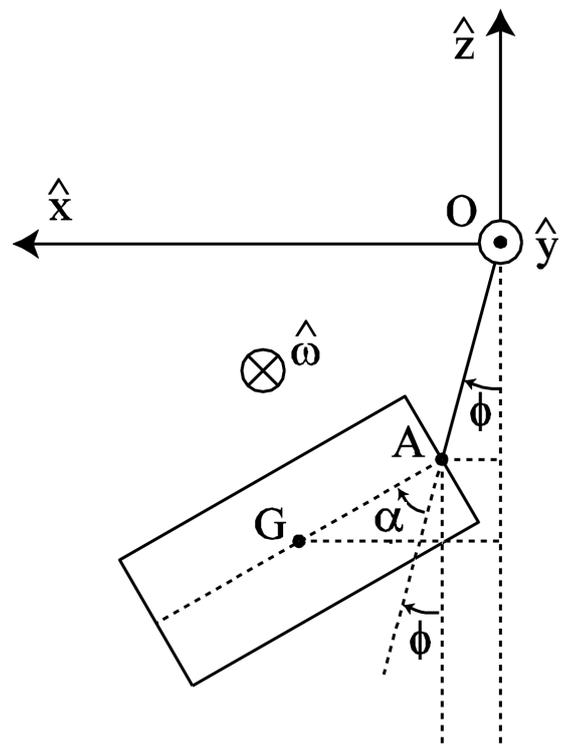
6.65 Oscillations d'une charge suspendue

- a) Le système possède 2 degrés de liberté pouvant être représentés par les coordonnées généralisées α et ϕ .
- b) L'énergie cinétique d'un solide indéformable est donnée dans ce cas par

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot I_G \boldsymbol{\omega} \quad (262)$$

où l'indice G désigne les grandeurs absolues relativement au centre d'inertie du solide. Le premier terme de l'énergie cinétique, généralement appelé énergie cinétique de translation, s'applique à n'importe quel type de mouvement du centre d'inertie G , même ici où G effectue une rotation.

Pour décrire le mouvement de ce solide, nous considérons deux référentiels, le référentiel absolu $Oxyz$ avec coordonnées cartésiennes selon la figure ci-contre et un référentiel relatif placé sur le solide au point d'attache A . Pour trouver l'énergie cinétique, il nous est indispensable de connaître \mathbf{v}_G et $\boldsymbol{\omega}$, on suppose connu I_G (il est facile d'en trouver la valeur dans une référence).



Pour déterminer la vitesse de rotation instantanée du solide, considérons-nous comme un observateur placé en A , solidaire de la charge suspendue. Considérons un mouvement de la charge pour un angle α constant. Nous percevons alors ce mouvement comme une rotation de vitesse $-\dot{\phi}\mathbf{e}_y$. Considérons maintenant un mouvement de la charge pour un angle ϕ constant. Nous percevons alors ce mouvement comme une rotation de vitesse $-\dot{\theta}\mathbf{e}_y$. Un mouvement quelconque de la charge sera donc une composition de ces deux mouvements et sera donnée par

$$\boldsymbol{\omega} = -(\dot{\alpha} + \dot{\phi})\mathbf{e}_y \quad (263)$$

La vitesse du point G est quant à elle donnée par

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG} \quad (264)$$

avec

$$\mathbf{v}_A = \frac{d}{dt}(\mathbf{OA}) = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} L \sin \phi \\ 0 \\ -L \cos \phi \end{pmatrix} = L\dot{\phi} \begin{pmatrix} \cos \phi \\ 0 \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad (265)$$

et

$$\boldsymbol{\omega} \wedge \mathbf{AG} = \begin{pmatrix} 0 \\ -(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} d \sin(\alpha + \phi) \\ 0 \\ -d \cos(\alpha + \phi) \end{pmatrix} = (\dot{\alpha} + \dot{\phi})d \begin{pmatrix} \cos(\alpha + \phi) \\ 0 \\ \sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix} \quad (266)$$

Ce qui donne

$$\mathbf{v}_G = \begin{pmatrix} L\dot{\phi} \cos \phi + (\dot{\alpha} + \dot{\phi})d \cos(\alpha + \phi) \\ 0 \\ L\dot{\phi} \sin \phi + (\dot{\alpha} + \dot{\phi})d \sin(\alpha + \phi) \end{pmatrix} \quad (267)$$

L'énergie cinétique s'écrit donc

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}I_G\boldsymbol{\omega}^2 = \frac{1}{2}m(v_{G,x}^2 + v_{G,y}^2 + v_{G,z}^2) + \frac{1}{2}I_G(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\phi}^2 \cos^2 \phi + 2Ld\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \cos \phi \cos(\alpha + \phi) + (\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 d^2 \cos^2(\alpha + \phi) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\phi}^2 \sin^2 \phi + 2Ld\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \sin \phi \sin(\alpha + \phi) + (\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 d^2 \sin^2(\alpha + \phi) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}I_G(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 \\ &= \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\phi}^2 + d^2(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 + 2Ld\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \cos \alpha \right) + \frac{1}{2}I_G(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 \end{aligned}$$

où l'on a utilisé les relations trigonométriques suivantes :

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)] \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

c) Connaissant déjà le terme T , il reste à déterminer l'énergie potentielle :

$$V = -mg(L \cos \phi + d \cos(\alpha + \phi)) \quad (268)$$

Le lagrangien est ainsi donné par

$$L = T - V = \frac{1}{2}m \left(L^2\dot{\phi}^2 + d^2(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 + 2Ld\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \cos \alpha \right) + \frac{1}{2}I_G(\dot{\alpha} + \dot{\phi})^2 + mg(L \cos \phi + d \cos(\alpha + \phi)) \quad (269)$$

En appliquant l'équation de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$ pour les coordonnées généralisées $\mathbf{q} = (\alpha, \phi)$, nous obtenons les équations du mouvement.

Pour la coordonnée α :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(2d^2(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) + 2Ld\dot{\phi} \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} I_G 2(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \right] + mLd\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \sin \alpha + mgd \sin(\alpha + \phi) = 0 \\ (I_G + md^2) (\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) + mLd\ddot{\phi} \cos \alpha - mLd\dot{\phi}\dot{\alpha} \sin \alpha + mLd\dot{\phi}(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \sin \alpha + mgd \sin(\alpha + \phi) = 0 \end{aligned}$$

et finalement l'équation du mouvement pour la coordonnée α est

$$(I_G + md^2) (\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) + mLd\ddot{\phi} \cos \alpha + mLd\dot{\phi}^2 \sin \alpha + mgd \sin(\alpha + \phi) = 0 \quad (270)$$

Pour la coordonnée ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \left(2L^2\dot{\phi} + 2d^2(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) + 2Ld(\dot{\alpha} + 2\dot{\phi}) \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} I_G 2(\dot{\alpha} + \dot{\phi}) \right] \\ + mgL \sin \phi + mgd \sin(\alpha + \phi) = 0 \end{aligned}$$

et finalement l'équation du mouvement pour la coordonnée ϕ est

$$\begin{aligned} (I_G + md^2) (\ddot{\alpha} + \ddot{\phi}) + mL^2\ddot{\phi} + mLd(\ddot{\alpha} + 2\ddot{\phi}) \cos \alpha - mLd\dot{\alpha}(\dot{\alpha} + 2\dot{\phi}) \sin \alpha + mgL \sin \phi \\ + mgd \sin(\alpha + \phi) = 0 \quad (271) \end{aligned}$$

6.73 La boule de billard sur table tournante

a) Le poids de la boule et la réaction du support se compensant, la deuxième loi de Newton s'écrit :

$$M\mathbf{a} = \mathbf{F} \quad (272)$$

où \mathbf{F} caractérise le glissement de la boule.

Le théorème du moment cinétique induit l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \mathbf{L}_G = \mathbf{M}_G = (-a\mathbf{k}) \wedge \mathbf{F} \quad (273)$$

avec $\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\omega}$ et où \mathbf{I}_G est un scalaire et \mathbf{k} unitaire.

Soit \mathbf{u} la vitesse du point de contact. On peut dès lors énoncer les trois équations vectorielles suivantes :

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\omega} \wedge (-a\mathbf{k}) \quad (274)$$

$$M\dot{\mathbf{V}}_G = \mathbf{F} \quad (275)$$

$$-a\mathbf{k} \wedge \mathbf{F} = I_G \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (276)$$

L'opération $\mathbf{k} \wedge$ (276) fournit une expression pour \mathbf{F} . Pour rappel : $\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$.

$$\mathbf{k} \wedge (-a\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) = -a\mathbf{k} \wedge (\mathbf{k} \wedge \mathbf{F}) = I_G \mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} = -a [(\mathbf{k} \cdot \mathbf{F})\mathbf{k} - \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{F}] \quad (277)$$

Ce qui aboutit à :

$$a\mathbf{F} = I_G \mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (278)$$

On injecte ensuite ce résultat pour \mathbf{F} dans l'équation (275) de manière à obtenir une équation pour $\boldsymbol{\omega}$:

$$M\dot{\mathbf{V}}_G = \frac{I_G}{a} \mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (279)$$

En dérivant l'équation (274), on obtient une équation en $\dot{\boldsymbol{\omega}}$:

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{V}}_G = \dot{\boldsymbol{\omega}} \wedge (-a\mathbf{k}) = a\mathbf{k} \wedge \dot{\boldsymbol{\omega}} \quad (280)$$

En considérant l'équation précédente et l'équation (279), on peut écrire :

$$\dot{\mathbf{u}} - \dot{\mathbf{V}}_G = \frac{a^2 M}{I_G} \dot{\mathbf{V}}_G \implies \dot{\mathbf{u}} = \left(1 + \frac{a^2 M}{I_G}\right) \dot{\mathbf{V}}_G \quad (281)$$

Après intégration, on obtient :

$$\mathbf{V}_G = \gamma \mathbf{u} + \mathbf{C} \quad (282)$$

avec $\gamma = \left(1 + \frac{a^2 M}{I_G}\right)^{-1}$ et où \mathbf{C} est à déterminer par les conditions initiales.

- b) Dans le cas où la surface horizontale est en rotation avec une vitesse Ω constante, on a $\mathbf{u} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{r}_G$. Après dérivation, $\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_G$. Par l'équation (281), on obtient :

$$\dot{\mathbf{V}}_G = \gamma \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{V}_G \quad (283)$$

De cette équation on tire que le mouvement est circulaire.

6.77 Roue en rotation uniforme

- a) Il faut appliquer le théorème du moment cinétique au point O , qui est un point fixe du solide :

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{M}_O^{ext} \quad (284)$$

Soient $\boldsymbol{\Omega}$ la vitesse angulaire de précession, et $\boldsymbol{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation propre de la roue.

- b) Le repère (O, y_1, y_2, y_3) défini sur la figure est un repère d'inertie. Les trois axes de ce repère sont les axes principaux de la roue. Nous pouvons donc écrire :

$$\mathbf{L}_O = \tilde{I}_O(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \quad (285)$$

où \tilde{I}_O est le tenseur d'inertie de la roue au point O .

Dans le repère (O, y_1, y_2, y_3) , \tilde{I}_O s'écrit :

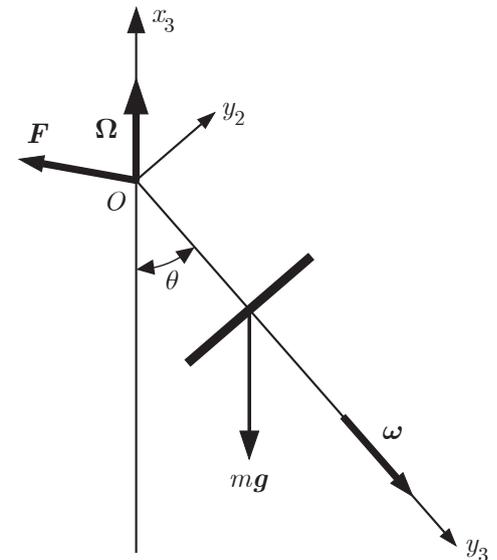
$$\tilde{I}_O = \begin{pmatrix} I_{O\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O\parallel} \end{pmatrix} \quad (286)$$

Les vecteurs vitesses angulaires de rotation s'écrivent :

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin \theta \\ -\Omega \cos \theta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \quad (287)$$

On a donc :

$$\mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} I_{O\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{O\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{O\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin \theta \\ \omega - \Omega \cos \theta \end{pmatrix} = I_{O\perp} \Omega \sin \theta \hat{y}_2 + I_{O\parallel} (\omega - \Omega \cos \theta) \hat{y}_3 \quad (288)$$



On peut aussi calculer le moment cinétique au point G , et en déduire le moment cinétique au point O en utilisant la formule :

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}_G + \mathbf{L}_G \quad \text{avec} \quad \mathbf{L}_G = \tilde{I}_G(\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \quad (289)$$

Comme $\tilde{I}_G = \begin{pmatrix} I_{G\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G\parallel} \end{pmatrix}$, on obtient :

$$\mathbf{L}_G = \begin{pmatrix} I_{G\perp} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G\perp} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G\parallel} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin \theta \\ \omega - \Omega \cos \theta \end{pmatrix} = I_{G\perp} \Omega \sin \theta \hat{y}_2 + I_{G\parallel} (\omega - \Omega \cos \theta) \hat{y}_3 \quad (290)$$

De plus, $\mathbf{OG} \wedge M\mathbf{v}_G = L\hat{y}_3 \wedge ML \sin \theta \Omega \hat{y}_1 = ML^2 \Omega \sin \theta \hat{y}_2$.

On obtient en définitive :

$$\mathbf{L}_O = (I_{G\perp} + ML^2) \Omega \sin \theta \hat{y}_2 + I_{G\parallel} (\omega - \Omega \cos \theta) \hat{y}_3 \quad (291)$$

On vérifie ainsi qu'on passe des composantes du tenseur d'inertie par rapport à O ou G en appliquant la formule de Steiner :

$$\begin{cases} I_{O\perp} = I_{G\perp} + ML^2 \\ I_{O\parallel} = I_{G\parallel} \end{cases} \quad (292)$$

- c) Puisque le repère $(O, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ est un repère d'inertie lié au solide tournant à la vitesse angulaire Ω autour de Ox_3 avec Ω constant, on a

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{L}_O = \mathbf{M}_O^{ext} = (\Omega I_{\parallel} \sin \theta (\omega - \Omega \cos \theta) + \Omega^2 I_{O\perp} \cos \theta \sin \theta) \hat{y}_1$$

Ce résultat conclut la résolution du problème.

Cependant, on peut s'interroger sur son sens physique. En particulier, on pourrait s'attendre à voir apparaître un terme qui dépende du poids ! Le fait est que le moment \mathbf{M}_O^{ext} est la résultante de deux termes. L'un est le moment dû au poids, $\mathbf{OG} \wedge M\mathbf{g}$. L'autre est un moment supplémentaire qu'il faut appliquer à l'axe pour satisfaire les conditions du mouvement. Il s'obtient donc en soustrayant $\mathbf{OG} \wedge M\mathbf{g}$ de \mathbf{M}_O^{ext} . Appelons ce dernier \mathbf{M}_O^{app} pour « moment appliqué ». On a ainsi :

$$\mathbf{M}_O^{app} = -\mathbf{OG} \wedge M\mathbf{g} + (\Omega I_{\parallel} \sin \theta (\omega - \Omega \cos \theta) + \Omega^2 I_{O\perp} \cos \theta \sin \theta) \hat{y}_1 \quad (293)$$

On voit ainsi clairement apparaître la notion intuitive selon laquelle le moment appliqué agit pour contrebalancer le moment dû au poids, et agit aussi pour tenir compte des effets gyroscopiques. Pour rendre le sens physique de ce moment \mathbf{M}_O^{app} , on peut s'imaginer l'implémenter par un couple de forces. Soit par exemple une force \mathbf{C} appliquée sur l'axe à un point P_α donné par $\mathbf{d} = \mathbf{OP}_\alpha$ et une force $-\mathbf{C}$ appliquée à $-\mathbf{d}$. Alors $\mathbf{M}_O^{app} = 2\mathbf{d} \wedge \mathbf{C}$. On note que le théorème du moment cinétique avec le point O comme référence permet de déterminer \mathbf{M}_O^{app} , donc la force \mathbf{C} , mais ne dit rien de la force de réaction \mathbf{F} . Inversement, le théorème du centre de masse permet de trouver la force de réaction \mathbf{F} , mais ne dit rien de \mathbf{C} , puisque la somme des deux forces \mathbf{C} et $-\mathbf{C}$ qui implémentent \mathbf{M}_O^{app} est nulle !

Finalement, on peut se demander ce qui se passe si on commence par appliquer $\frac{d\mathbf{L}_G}{dt} = \mathbf{M}_G^{ext}$.

Dans cette approche, on calcule $\mathbf{L}_G = I_{G\perp} \Omega \sin \theta \hat{y}_2 + I_{G\parallel} (\omega - \Omega \cos \theta) \hat{y}_3$. Pour comparer les deux approches, on note que $\mathbf{L}_O = \mathbf{L}_G + ML^2 \Omega \cos \theta \hat{y}_2$. En dérivant par rapport au temps cette expression, les deux formes du théorème du moment cinétique et les formules de Poisson impliquent : $\mathbf{M}_O^{ext} = \mathbf{M}_G^{ext} + ML^2 \Omega^2 \sin \theta \cos \theta \hat{y}_1$. Mais d'autre part, en considérant le couple des forces \mathbf{C} et le moment du poids, on peut écrire immédiatement :

$$\mathbf{M}_O^{ext} = 2\mathbf{d} \wedge \mathbf{C} + \mathbf{OG} \wedge M\mathbf{g} \quad (294)$$

$$\mathbf{M}_G^{ext} = (\mathbf{GO} - \mathbf{d}) \wedge (-\mathbf{C}) + (\mathbf{GO} + \mathbf{d}) \wedge (\mathbf{C}) + \mathbf{GO} \wedge \mathbf{F} = 2\mathbf{d} \wedge \mathbf{C} + \mathbf{GO} \wedge \mathbf{F} \quad (295)$$

Par conséquent :

$$\mathbf{M}_O^{ext} - \mathbf{M}_G^{ext} = \mathbf{OG} \wedge (M\mathbf{g} + \mathbf{F}) \quad (296)$$

C'est le théorème du centre de masse qui nous dicte maintenant la valeur de la somme des forces. G décrit un mouvement circulaire uniforme d'accélération centripète horizontale. On peut écrire immédiatement :

$$ML \sin \theta \Omega^2 (-\sin \theta \hat{y}_3 - \cos \theta \hat{y}_2) = M\mathbf{g} + \mathbf{F} \quad (297)$$

Le produit vectoriel confirme comme il se doit le résultat déjà obtenu pour la différence entre le moment par rapport à G et par rapport à O :

$$\mathbf{OG} \wedge (M\mathbf{g} + \mathbf{F}) = ML^2 \sin \theta \cos \theta \Omega^2 \hat{y}_1 \quad (298)$$

6.3 Méthode de Lagrange

6.81 Cylindre dans cylindre

- a) Le système étudié est formé des deux cylindres et possède un seul degré de liberté. En effet, puisque le petit cylindre roule sans glisser à l'intérieur du grand cylindre, les angles α et θ sont liés par la condition de roulement sans glissement (vitesse du point de contact \mathbf{v}_P nulle). Cette condition s'exprime de la façon suivante :

$$\mathbf{v}_P = \mathbf{v}_G + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GP} = 0 \quad (299)$$

où $\boldsymbol{\Omega} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha})\mathbf{e}_z$ est le vecteur vitesse de rotation totale du petit cylindre.

La vitesse du point G est donnée en coordonnées cylindriques par

$$\mathbf{v}_G = (R - r)\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta \quad (300)$$

ainsi que

$$\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{GP} = (\dot{\theta} + \dot{\alpha})r\mathbf{e}_\theta \quad (301)$$

La condition de roulement sans glissement projetée sur \mathbf{e}_θ donne donc

$$R\dot{\theta} + r\dot{\alpha} = 0 \quad (302)$$

L'énergie cinétique du système est :

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{I}\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \quad (303)$$

L'énergie potentielle s'exprime quant à elle par :

$$V = -mg(R - r)\cos\theta \quad (304)$$

On en déduit directement le lagrangien du système en fonction de θ uniquement à l'aide de l'équation (302) :

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(R - r)^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 + mg(R - r)\cos\theta \quad (305)$$

Les équations du mouvement sont obtenues par les équations de Lagrange. En l'occurrence une seule équation pour la coordonnée θ .

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (306)$$

Ce qui donne,

$$\left[m(R - r)^2 + I \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 \right] \ddot{\theta} + mg(R - r)\sin\theta = 0 \quad (307)$$

- b) Dans le cas de petites oscillations autour de la position d'équilibre, on peut poser $\sin\theta \simeq \theta$ et l'équation du mouvement peut se réécrire comme

$$\left[m(R - r)^2 + I \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2 \right] \ddot{\theta} + mg(R - r)\theta = 0 \quad (308)$$

Cette équation s'apparente alors à l'équation différentielle homogène du second ordre de l'oscillateur harmonique, $m\ddot{x} + kx = 0$, dont on sait que la pulsation est égale à $\omega = 2\pi f = \sqrt{k/m}$. Par analogie, on en déduit la fréquence d'oscillation qui s'exprime par :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{mg(R - r)}{m(R - r)^2 + I \left(1 - \frac{R}{r}\right)^2}} \quad (309)$$

Finalement, sachant que le moment d'inertie pour un cylindre homogène est donné par $I = \frac{1}{2}mr^2$, on a

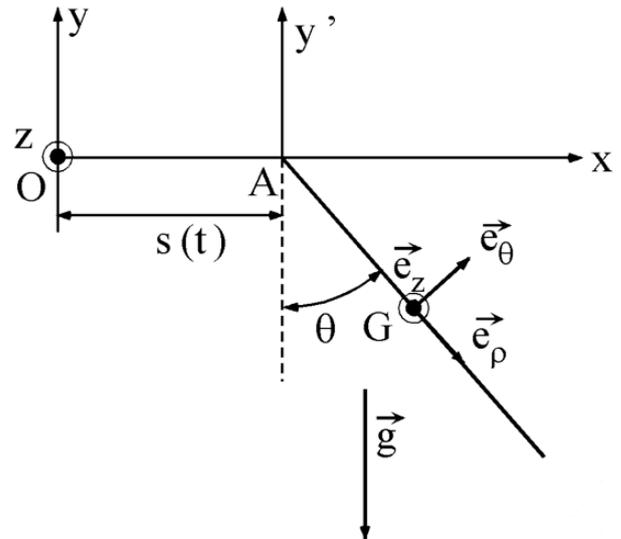
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{g}{R-r}} \quad (310)$$

6.82 Barre tractée

Le système est caractérisé par le référentiel absolu $Oxyz$ et le référentiel relatif lié au point d'attache de la barre $Axy'z'$. On travaillera avec le repère cylindrique $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ dans le référentiel mobile. Les coordonnées du centre de masse G sont données par

$$\mathbf{OG} = \mathbf{OA} + \mathbf{AG} = s(t)\mathbf{e}_x + \mathbf{AG} \quad (311)$$

où \mathbf{AG} est décrit par les coordonnées $\rho = L$, $z = \text{cste}$ et θ libre. θ est donc la coordonnée associée au seul degré de liberté du système.



a) L'énergie potentielle est égale à

$$V = -mgL \cos \theta \quad (312)$$

Et l'énergie cinétique s'exprime par

$$T = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \cdot I_G\boldsymbol{\omega}) \quad (313)$$

avec I_G le moment d'inertie de la barre et $\boldsymbol{\omega} = \dot{\theta}\mathbf{e}_z$.

On obtient \mathbf{v}_G en passant par l'expression du mouvement relatif, *i.e.*

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_a(G) = \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(G) \quad (314)$$

avec $\mathbf{v}_a(A) = \dot{s}(t)\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{v}_r(G) = L\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$ obtenue avec l'expression de la vitesse en coordonnées cylindriques. Finalement, en utilisant le fait que $\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \mathbf{e}_x + \sin \theta \mathbf{e}_y$, on en tire que

$$\mathbf{v}_G = (\dot{s} + L\dot{\theta} \cos \theta)\mathbf{e}_x + L\dot{\theta} \sin \theta \mathbf{e}_y \quad (315)$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v}_G^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta} \cos \theta \quad (316)$$

L'énergie cinétique est donc finalement donnée par

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{2}I_G\dot{\theta}^2 \quad (317)$$

Le lagrangien est alors

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}(mL^2 + I_G)\dot{\theta}^2 + m\dot{s}L\dot{\theta} \cos \theta + mgL \cos \theta \quad (318)$$

L'équation du mouvement découle de l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (319)$$

avec

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} &= (mL^2 + I_G)\dot{\theta} + m\dot{s}L \cos \theta \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) &= (mL^2 + I_G)\ddot{\theta} - m\dot{s}L\dot{\theta} \sin \theta + m\ddot{s}L \cos \theta \\ \frac{\partial L}{\partial \theta} &= -m\dot{s}L\dot{\theta} \sin \theta - mgL \sin \theta\end{aligned}$$

Finalement, l'équation (319) se réécrit comme

$$(mL^2 + I_G)\ddot{\theta} + m\ddot{s}L \cos \theta + mgL \sin \theta = 0 \quad (320)$$

qui est l'équation du mouvement pour la coordonnée θ .

6.87 Molécule diatomique adsorbée

- a) Le système possède 2 degrés de liberté. On définit les coordonnées généralisées x_1 et x_2 , coordonnées des masses m_1 et m_2 sur l'axe Ox . Remarque, on pourrait tout aussi bien résoudre le problème en considérant les distances $O - m_1$ et $m_1 - m_2$ comme coordonnées généralisées. Avec les coordonnées envisagées, l'énergie cinétique du système est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 \quad (321)$$

L'énergie potentielle s'exprime elle par

$$V = \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1 - l_2)^2 \quad (322)$$

avec l_1 et l_2 les longueurs au repos des ressorts de constantes k_1 et k_2 .

Le lagrangien du système est donc

$$L = T - V = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}k_1(x_1 - l_1)^2 - \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_1 - l_2)^2 \quad (323)$$

- b) Equation de Lagrange sur la coordonnée x_1 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_1) = m\ddot{x}_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x_1} = -k_1(x_1 - l_1) + k_2(x_2 - x_1 - l_2) \quad (324)$$

Et donc on a l'équation du mouvement

$$m_1\ddot{x}_1 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 - k_1l_1 + k_2l_2 = 0 \quad (325)$$

Equation de Lagrange sur la coordonnée x_2 :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{d}{dt} (m\dot{x}_2) = m\ddot{x}_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = -k_2(x_2 - x_1 - l_2) \quad (326)$$

Et donc on a l'équation du mouvement

$$m_2\ddot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1 - l_2) = 0 \quad (327)$$

- c) Afin de trouver les solutions pour lesquelles les deux masses oscillent à la même fréquence, les modes propres, on doit résoudre le système composé des deux équations du mouvement. Or, puisque ces équations sont couplées, il est plus aisé de passer par une résolution matricielle. Les équations (325) et (327) se mettent alors sous la forme

$$\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 & k_2 \\ k_2 & -k_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k_1 l_1 - k_2 l_2 \\ k_2 l_2 \end{pmatrix} \quad (328)$$

La matrice inverse de $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} m_1^{-1} & 0 \\ 0 & m_2^{-1} \end{pmatrix}$.

En multipliant par cette matrice l'équation (328), on aboutit à un système différentiel du deuxième ordre de la forme $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k_1 l_1 - k_2 l_2}{m_1} \\ \frac{k_2 l_2}{m_2} \end{pmatrix} \quad (329)$$

Les solutions *générales*, de même fréquence, d'un tel système d'équations différentielles sont sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{a} e^{i\omega t} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} e^{i\omega t} \quad (330)$$

où ω est la pulsation cherchée, identique pour les deux masses. Ainsi, la fréquence s'obtient en résolvant uniquement le système différentiel homogène $\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{K}\mathbf{x}$.

En injectant l'ansatz (330) dans l'équation (329), et en simplifiant par $e^{i\omega t}$, on obtient

$$-\omega^2 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (331)$$

On remarque ainsi que le vecteur \mathbf{a} est vecteur propre de la matrice \mathbf{K} de valeur propre $-\omega^2$. La présence du carré implique donc que \mathbf{a} est associé à deux pulsations $\pm\omega$.

Ce qui revient à écrire

$$0 = \left(\begin{pmatrix} \frac{-k_1 - k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} \end{pmatrix} + \omega^2 \mathbb{1} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \equiv (\mathbf{M} + \omega^2 \mathbb{1}) \mathbf{a} \quad (332)$$

Comme on cherche des solutions telles que \mathbf{a} soit non nul (solution non triviale), les seules valeurs de ω possibles sont les valeurs telles que $\text{Det}(\mathbf{M} + \omega^2 \mathbb{1}) = 0$, *i.e.* les valeurs propres racines du polynôme caractéristique. En effet, si ce déterminant n'était pas nul, la matrice $(\mathbf{M} + \omega^2 \mathbb{1})$ serait inversible et le système (332) donnerait trivialement $\mathbf{a} = 0$.

On a donc

$$\begin{aligned} \text{Det}(\mathbf{M} + \omega^2 \mathbb{1}) &= \begin{vmatrix} \frac{-k_1 - k_2}{m_1} + \omega^2 & \frac{k_2}{m_1} \\ \frac{k_2}{m_2} & \frac{-k_2}{m_2} + \omega^2 \end{vmatrix} \\ &= \omega^4 + \omega^2 \left(\frac{-k_1 - k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_2(k_1 + k_2)}{m_1 m_2} - \frac{k_2^2}{m_1 m_2} \\ &= \omega^4 + \omega^2 \left(\frac{-k_1 - k_2}{m_1} - \frac{k_2}{m_2} \right) + \frac{k_1 k_2}{m_1 m_2} = 0 \end{aligned}$$

Et les racines de cette dernière équation sont finalement :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{m_2(k_1 + k_2) + m_1 k_2 \pm \sqrt{(-k_1 - k_2)m_2 - m_1 k_2)^2 - 4m_1 m_2 k_1 k_2}}{2m_1 m_2} \quad (333)$$

d) i) Si $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$, alors

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{k}{m} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad (334)$$

Ce qui donne 4 pulsations :

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}; \quad -\omega_+ = -\sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 + \sqrt{5}}{2}}; \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 - \sqrt{5}}{2}}; \quad -\omega_- = -\sqrt{\frac{k}{m} \frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \quad (335)$$

La forme des modes propres (solutions générales (330)) est déterminée lorsque les vecteurs propres \mathbf{a}_+ , \mathbf{a}_- associés aux valeurs propres ci-dessus sont connus. Dans ce cas, le système (332) devient

$$0 = \begin{pmatrix} \frac{-2k}{m} + \omega^2 & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-k}{m} + \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad (336)$$

• Pour ω_+^2 , on a en remplaçant dans l'équation précédente

$$\frac{k}{m} \begin{pmatrix} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (337)$$

Comme k/m est non nul, on en déduit le système d'équations :

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{2} a_1 + a_2 = 0 \quad \text{et} \quad a_1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_2 = 0 \quad (338)$$

La solution de ces équations donne le vecteur propre \mathbf{a}_+ associé aux pulsations ω_+ et $-\omega_+$. Le système d'équations possédant une inconnue libre, on fixe $a_1 = 1$, ce qui donne :

$$\mathbf{a}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad (339)$$

• Pour ω_-^2 , on trouve de la même manière le vecteur propre

$$\mathbf{a}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad (340)$$

pour les pulsations ω_- et $-\omega_-$.

On vérifie également que ces vecteurs propres sont bien orthogonaux entre eux. Connaissant à présent les vecteurs propres ainsi que les valeurs propres (et donc les pulsations), on peut écrire la solution générale pour les positions des deux masses donnée par :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{i\omega_- t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \quad (341)$$

où les constantes sont déterminées par les conditions initiales sur les positions \mathbf{x}_0 et les vitesses $\dot{\mathbf{x}}_0$. En effet, à $t = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = (A + B) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + (C + D) \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad (342)$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} \end{pmatrix} = (A - B)\omega_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} + (C - D)\omega_- \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \quad (343)$$

Ce qui représente bien 4 équations pour 4 inconnues.

Si on suppose que (ce point n'était pas demandé) $x_{2,0} = 2x_{1,0}$, i.e. $x_{1,0} = l_1 = l$ et $x_{2,0} = l_1 + l_2 = 2l$, et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, on obtient

$$A = B = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{20}l = -C = -D \quad (344)$$

ii) Si $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 \ll k_2$, alors en opérant les bonnes simplifications de (333), on aboutit à

$$\omega_+^2 = \frac{2k_2}{m} \quad \text{et} \quad \omega_-^2 = \frac{k_1}{2m} \quad (345)$$

Ce qui donne 4 pulsations :

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2k_2}{m}} ; \quad -\omega_+ = -\sqrt{\frac{2k_2}{m}} ; \quad \omega_- = \sqrt{\frac{k_1}{2m}} ; \quad -\omega_- = -\sqrt{\frac{k_1}{2m}} \quad (346)$$

• Pour ω_+^2 , appliqué à (332), cela donne le système suivant

$$\frac{k_2}{m} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad a_1 + a_2 = 0 \quad (347)$$

Cette équation possède une inconnue libre. En fixant $a_1 = 1$, on trouve le vecteur propre $\mathbf{a}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre ω_+^2 et donc aux deux pulsations ω_+ et $-\omega_+$.

• Pour ω_-^2 , le système (332) devient

$$\frac{k_2}{m} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0 \quad \implies \quad a_1 - a_2 = 0 \quad (348)$$

Cette équation possède une inconnue libre. En fixant $a_1 = 1$, on trouve le vecteur propre $\mathbf{a}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre ω_-^2 et donc aux deux pulsations ω_- et $-\omega_-$.

On vérifie que les deux vecteurs propres trouvés sont bien orthogonaux entre eux et la solution générale s'écrit donc sous la forme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\omega_+ t} + B \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_+ t} + C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_- t} + D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-i\omega_- t} \quad (349)$$

Les constantes sont à nouveau déterminées par les conditions initiales sur les positions \mathbf{x}_0 et les vitesses $\dot{\mathbf{x}}_0$. A $t = 0$, on a

$$\begin{pmatrix} x_{1,0} \\ x_{2,0} \end{pmatrix} = (A + B) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (C + D) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (350)$$

et

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1,0} \\ \dot{x}_{2,0} \end{pmatrix} = (A - B)\omega_+ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + (C - D)\omega_- \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (351)$$

Si, comme précédemment, on suppose $x_{2,0} = 2x_{1,0} = 2l$ et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, on obtient

$$A = B = -\frac{l}{4} \quad \text{et} \quad C = D = \frac{3l}{4} \quad (352)$$

Maintenant, si on suppose que $x_{2,0} = x_{1,0} = l$ et $\dot{x}_{1,0} = \dot{x}_{2,0} = 0$, c'est-à-dire que la deuxième masse est en quasi-coïncidence avec la première, on obtient

$$A = B = 0 \quad \text{et} \quad C = D \quad (353)$$

Alors à tout instant $x_1 = x_2$ et le mode propre est symétrique.

Finalement, si $x_{2,0} = x_{1,0} = l$, deuxième masse en quasi-coïncidence avec la première, et $\dot{x}_{1,0} = -\dot{x}_{2,0} \neq 0$, les masses sont lancées dans des directions opposées, on obtient

$$A = -B \quad \text{et} \quad C = D \quad (354)$$

Et l'on a affaire à une composition d'un mode propre anti-symétrique avec un mode propre symétrique.

6.4 Relativité

6.92 Fin du Soleil

Etant donné que le rayon de la terre r est négligeable par rapport à la distance terre-soleil d , i.e. $r \ll d$, les rayons du soleil arrivent quasiment parallèles à la surface de la terre qui peut être assimilée à un disque de rayon r .

L'énergie des rayons lumineux du soleil est produite par conversion d'énergie de masse E_0 en énergie de rayonnement. Donc, la puissance de rayonnement est égale à la variation d'énergie de masse par unité de temps, i.e.

$$PS = \frac{dE_0}{dt} = \frac{dM}{dt} c^2, \quad (355)$$

où S est la surface exposée au rayonnement. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps nécessaire à produire un rayonnement sur une surface exposée S est donnée par,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{PS}{c^2}. \quad (356)$$

- a) La surface de la terre exposée perpendiculairement aux rayons lumineux du soleil est un disque de surface $S = \pi r^2$. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps $\frac{dM(T)}{dt}$ nécessaire à produire le rayonnement reçu par la terre vaut,

$$\frac{dM(T)}{dt} = \frac{\pi r^2 P}{c^2} = 1.96 \text{ kg/s}. \quad (357)$$

- b) La surface totale exposée perpendiculairement aux rayons lumineux du soleil à une distance d est une sphère de surface $S = 4\pi d^2$. Par conséquent, la variation de masse solaire par unité de temps $\frac{dM}{dt}$ nécessaire à produire le rayonnement total émis par le soleil vaut,

$$\frac{dM}{dt} = \frac{4\pi d^2 P}{c^2} = 4.31 \cdot 10^9 \text{ kg/s}. \quad (358)$$

- c) La réaction nucléaire de fusion des protons (i.e. de l'hydrogène ionisé H^+) implique que le défaut de masse m d'une réaction et le défaut de masse $M = Nm$ de l'ensemble des N réactions valent,

$$m = 4m(\text{p}) - m(\text{He}^4) \Rightarrow Nm = N(4m(\text{p}) - m(\text{He}^4)) \Rightarrow M = 4M(\text{p}) - M(\text{He}^4). \quad (359)$$

La variation de masse de protons solaires par unité de temps est liée à la variation de masse solaire par unité de temps par,

$$\frac{dM(\text{p})}{dt} = \frac{4M(\text{p})}{4M(\text{p}) - M(\text{He}^4)} \cdot \frac{dM}{dt} = \frac{4m(\text{p})}{4m(\text{p}) - m(\text{He}^4)} \cdot \frac{dM}{dt}. \quad (360)$$

Ainsi, les expressions (358) et (360) impliquent que

$$\frac{dM(\text{p})}{dt} = \frac{4m(\text{p})}{4m(\text{p}) - m(\text{He}^4)} \cdot \frac{4\pi d^2 P}{c^2} = 6.56 \cdot 10^{11} \text{ kg/s}. \quad (361)$$

- d) La durée de vie du soleil est donnée par,

$$T = \frac{M_S}{\frac{dM(\text{p})}{dt}} = 3.08 \cdot 10^{18} \text{ s} = 9.76 \cdot 10^{10} \text{ ans}. \quad (362)$$

En 1926, Sir Arthur EDDINGTON annonce que si le Soleil était constitué d'hydrogène pur, il pourrait briller pendant environ 100 milliards d'années en consommant $6 \cdot 10^{11}$ kg d'hydrogène par seconde.

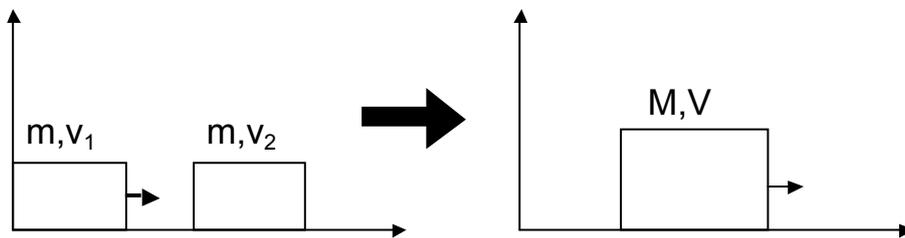
Ce temps est très supérieur à l'âge de l'univers qui a déjà connu l'existence et l'extinction d'étoiles de taille relativement similaire à celle du soleil. On voit donc que ce modèle est trop simple pour tenir compte de l'intégralité des mécanismes d'évolution stellaire. On doit tenir compte notamment du fait que seul l'hydrogène contenu dans le noyau solaire est à une température suffisante pour autoriser la fusion.

TABLE 1 – Composition chimique du soleil

Hydrogène	92.1%	Fer	0.0037%
Hélium	7.8%	Silicium	0.0031%
Oxygène	0.061%	Magnésium	0.0024%
Carbone	0.030%	Sulfure	0.0015%
Azote	0.0084%	Autres	0.0015%
Néon	0.0076%		

6.93 Collisions totalement inélastiques

Plaçons-nous dans un référentiel dans lequel $v_2 = 0$ et $v_1 = v$. Nous allons appliquer le principe de conservation de la partie temps et de la partie espace de la quantité de mouvement généralisée (quadri-vecteur) pour le système composé des deux masses avant et après la collision.



On note $\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$. M et V sont respectivement la masse et la vitesse du système après collision.

Ainsi nous avons :

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)MV \quad (363)$$

$$\gamma(v)mc^2 + mc^2 = \gamma(V)Mc^2 \quad (364)$$

En remplaçant la partie droite de (364), après simplification par c^2 , dans (363) on obtient :

$$\gamma(v)mv = V(\gamma(v)m + m) \implies V = \frac{\gamma(v)v}{1 + \gamma(v)} \quad (365)$$

En remplaçant l'expression de V dans (363) on obtient :

$$\gamma(v)mv = \gamma(V)M \frac{\gamma(v)v}{1 + \gamma(v)} \implies M = \left(\frac{1 + \gamma(v)}{\gamma(V)} \right) m \quad (366)$$

Calculons la différence d'énergie cinétique entre l'instant final et l'instant initial. Avant la collision l'énergie cinétique T_{init} est définie par la différence entre l'énergie due à la vitesse v de la première masse et son énergie au repos (pas de contribution de la seconde masse immobile dans le référentiel choisi) :

$$T_{init} = \gamma(v)mc^2 - mc^2 = (\gamma(v) - 1)mc^2 \quad (367)$$

Après la collision l'énergie cinétique T s'écrit :

$$T_{final} = \gamma(V)Mc^2 - Mc^2 = \gamma(V) \left(\frac{1 + \gamma(v)}{\gamma(V)} \right) mc^2 - Mc^2 = (1 + \gamma(v))mc^2 - Mc^2 \quad (368)$$

Ainsi la variation d'énergie cinétique s'écrit :

$$\Delta T = (1 + \gamma(v))mc^2 - Mc^2 - (\gamma(v) - 1)mc^2 = (2m - M)c^2 \quad (369)$$

Ce qui correspond à l'énergie liée au défaut de masse $\Delta T = \Delta mc^2$.